Жалпыланған функциялар

14-дәріс

Фурье түрлендіруі және S'

Темперленген үлестірімдер және дифференциалдау

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Дифференциалдық теңдеулер мен түрлендірулер

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Фурье түрлендіруін дуалдық арқылы анықтау және дифференциалдау формуласын қолдану.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Түрлендірудің негізгі амалдары
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

Осы курста $\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int \mathbb{R}\, e^{-ix\xi}\varphi(x)dx$ келісімін қолданамыз. Кері түрлендіруде $(2\pi)^{-1}$ көбейткіші мен оң таңбалы экспонента болады. $\mathcal{F}$ Шварц кеңістігін өзіне бейнелейді. Бөліктеп интегралдау ξ дәрежесін x бойынша туындыға ауыстырады. Ал ξ бойынша туынды интеграл астындағы x дәрежесіне сәйкес келеді. Сөйтіп Шварц жартылай нормалары бақыланады.

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \qquad \mathcal{F}(DT) = i\xi\, \mathcal{F}T.$$

Шығарылған мысал

$\mathcal{F}\delta_a = e^{-ia\xi}$, себебі $\langle \mathcal{F}\delta_a, \varphi \rangle = (\mathcal{F}\varphi)(a)$. Атап айтқанда $\mathcal{F}\delta_0 = 1$. Кері түрлендіру формуласын $x = 0$ нүктесінде қолдансақ, $\int \mathcal{F}\varphi(x)dx = 2\pi\varphi(0)$. Сондықтан $\mathcal{F}1 = 2\pi\delta_0$. Бұл екі формула нормалау таңдауын тексеруге көмектеседі.

Негізгі ұғымдар

Қолдану ретінде $(1 - D^2)u = \delta_0$ теңдеуін қарайық. Фурье түрлендіруінен (1+ξ²)û=1, яғни û=1/(1+ξ²). $u(x) = ½e^{-|x|}$ үшін оң және сол жарты осьтердегі интегралдарды жеке есептегенде дәл осы нәтиже алынады. Сонымен, бұл функция $1 - D^2$ операторының фундаменталдық шешімі.

Фурье түрлендіруі және туынды

ТЕОРЕМА

$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int e^{-ix}\xi\varphi(x)dx$ келісімінде $T \in \mathcal{S}'$ үшін $\mathcal{F}(DT) = i\xi\mathcal{F}T$.

$$\mathcal{F}(DT)(\xi) = i\xi\,\mathcal{F}(T)(\xi)$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Фурье түрлендіруі және туынды

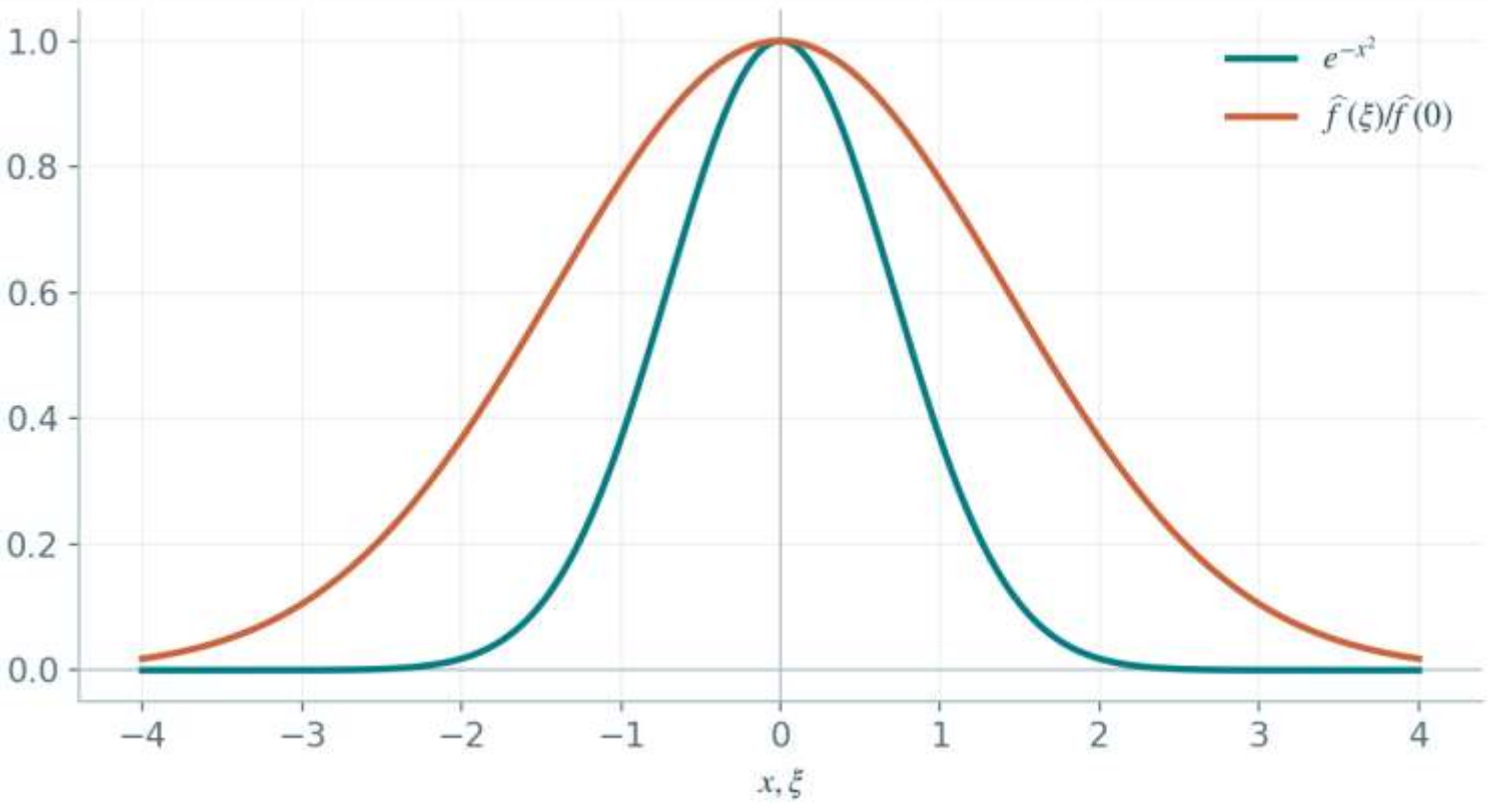
Сынақ функциясы бойынша $\langle \mathcal{F}(DT), \varphi \rangle = \langle DT, \mathcal{F}\varphi \rangle = -\langle T, D(\mathcal{F}\varphi) \rangle$. φ тез кемитіндіктен $\xi\varphi$ интегралданады. Сондықтан интеграл астында туындылату арқылы $D(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}(-i\xi\varphi)$.

Дәлелдеу · 2-қадам

Фурье түрлендіруі және туынды

Осыны қойсақ, $-\langle T, \mathcal{F}(-i\xi\varphi)\rangle = \langle \mathcal{F}T, i\xi\varphi\rangle = \langle i\xi\mathcal{F}T, \varphi\rangle$. Кез келген сынақ функциясы үшін орындалғандықтан теңдік $\mathcal{S}'$-те дұрыс.

Гаусстың тура Фурье бейнесі



Графикті оқу

Гаусстың Фурье бейнесі де Гаусс. Графиктер биіктігі бірге нормаланған.

Түсіндірме

Түрлендірудегі $i\xi$ көбейткішінің таңбасын жұптастырумен тексерейік. $(\mathcal{F}\varphi)'(x) = \mathcal{F}(-i\xi\varphi)(x)$. Сондықтан $\langle \mathcal{F}(DT), \varphi \rangle = -\langle T, \mathcal{F}(-i\xi\varphi) \rangle = \langle i\xi \mathcal{F}T, \varphi \rangle$. Екінші туынды үшін көбейткіш $-\xi^2$ болады.

Өзіндік жұмыс

$\mathcal{F}\delta_a{}'$ табыңыз. Жауап: $i\xi e^{-ia\xi}$. Дифференциалдау формуласын қолданыңыз.

Нормалау таңдауын тексеру

Нормалау таңдауын тексеру. Осы дәрісте тура Фурье түрлендіруінде коэффициент жоқ, ал кері түрлендіруде $1/(2\pi)$ бар. Сондықтан $\mathcal{F}\delta_0 = 1$ және $\mathcal{F}1 = 2\pi\delta_0$. Бірінші теңдік сынақ функциясын нөлде бағалаудан, екіншісі кері түрлендіру формуласын нөлде қолданудан шығады. Егер оқу құралында басқа нормалау қолданылса, тұрақты коэффициенттер өзгеруі мүмкін. Есептің басында тура және кері түрлендіруді қатар жазу осы айырманы бақылауға көмектеседі.

Түрлендірудің негізгі амалдары

Курста $\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int \mathbb{R} e^{-ix\xi}\varphi(x)dx$ келісімі сақталады. Жиілік бойынша туындыны интеграл астына өткізсек, $(\mathcal{F}\varphi)' = \mathcal{F}(-ix\varphi)$. Осыдан $\mathcal{F}(xT) = iD_\xi \mathcal{F}T$. Уақыт не кеңістік бойынша туынды басқа амал береді: $\mathcal{F}(DT) = i\xi\mathcal{F}T$. Екі формуланың айырмасы есептің қай айнымалысында дифференциалдау орындалатынын көрсетеді.

$$\mathcal{F}(DT) = i\xi\,\mathcal{F}T, \qquad \mathcal{F}(xT) = iD_\xi \mathcal{F}T.$$

Түрлендірудің негізгі амалдары

Мысал. $\mathcal{F}1 = 2\pi\delta_0$ болғандықтан $\mathcal{F}x = 2\pi i\delta_0{}'$. Жалпы $\mathcal{F}(x^k) = 2\pi i^k \delta_0^{(k)}$. Тексеру үшін $k = 1$ жағдайында $\langle 2\pi i\delta_0{}', \varphi\rangle = -2\pi i\varphi'(0)$ аламыз. Бұл кері Фурье формуласын нөлде туындылатқаннан шығатын $\int x\mathcal{F}\varphi(x)dx$ мәнімен сәйкес.

Ығыстыру формуласын да шығарайық

Ығыстыру формуласын да шығарайық. $T_a = T(x-a)$ үшін $\langle \mathcal{F}T_a, \varphi \rangle = \langle T(y), \mathcal{F}\varphi(y+a) \rangle$. Ал $\mathcal{F}\varphi(y+a) = \mathcal{F}(e^{-ia\xi}\varphi)(y)$. Демек $\mathcal{F}T_a = e^{-ia\xi}\mathcal{F}T$. Мысалы, δ_0-ді a-ға ығыстырғанда Фурье бейнесі 1- ден $e^{-ia\xi}$-ге ауысады.

Түрлендірудің негізгі амалдары

Осы формулалар S' кеңістігінде дұрыс, өйткені көпмүшелер және $e^{-ia\xi}$ көбейткіштері сынақ функцияларын S-тен S-ке бейнелейді. Туындылар да осы кеңістікті сақтайды.

Жиілік аймағында теңдеу шешу

Жиілік аймағында теңдеу шешу. $L = P(D)$ болса, $\mathcal{F}$(Lu)=P(iξ)û. Егер $P(i\xi)$ нақты осьте нөлге тең болмаса және оның кері шамасы S'-те көбейтуге жараса, û=$\mathcal{F}$f/P(iξ) формуласын қолданамыз. Ал $P(i\xi)$ нөлге айналатын нүкте болса, бірден бөлуге болмайды. Мысалы, $\xi V = 0$ теңдеуінің $V = c\delta_0$ шешімдері бар. Осы ерекшелік біртекті дифференциалдық теңдеудің тұрақты шешімдерімен байланысты.

Шығарылған есеп

$(4 - D^2)u = \delta_a$ теңдеуін S' ішінде шешейік. Фурье түрлендіруінен (4+ξ²)û=e^(−iaξ). Көбейткіш барлық ξ үшін оң және оның кері шамасы S'-те көбейтуге жарамды, сондықтан û=e^(−iaξ)/(4+ξ²). Енді $\int_0$^∞$e^{-2x}e^{-ix\xi}dx = 1/(2 + i\xi)$ және $\int_$^∞$^0 e^{2x}e^{-ix\xi}dx = 1/(2 - i\xi)$. Олардың қосындысы $4/(4 + \xi^2)$.

$$u(x) = \frac{1}{4}e^{-2|x-a|}.$$

Тікелей тексеру

Тікелей тексеру. $x \neq a$ кезінде $u'' = 4u$. a нүктесінде u үздіксіз, ал $u'\,(a+) = -1/2$ және $u'(a-) = 1/2$. Демек u' секірісі -1. Жалпыланған екінші туынды $4u - \delta_a$, сондықтан $(4 - D^2)u = \delta_a$.

Өзіндік жұмыс

1) $\mathcal{F}\delta_0{}''$ табыңыз.

2) $\mathcal{F}(e^{ibx})$ түрлендіруін есептеңіз. $\mathcal{F}1$ формуласын пайдаланыңыз.

3) $(1 - D^2)u = \delta_a{}'$ үшін алдыңғы фундаменталдық шешімді қалай қолданасыз?

Жауаптарды тексеру

1) $-\xi^2$. 2) $2\pi\delta_b$. Шынында, жұптастырудағы e^{ibx} көбейткіші кері түрлендіруді b нүктесінде бағалайды. 3) $u = D[½e\hat{}(-|\ x - a|)]$, себебі D операторы $1 - D^2$ операторымен ауыстырымды.

Қосымша есеп

$Du = \delta_0$ теңдеуін Фурье арқылы сипаттайық. iξû=1. Бас мән үшін $\xi \cdot \mathrm{pv}(1/\xi) = 1$ болғандықтан, û=−i $\mathrm{pv}(1/\xi) + c\delta_0$ жалпы шешім болады. Бастапқы айнымалыда $Du = \delta_0$ теңдеуінің шешімі $H + C$ екені белгілі. Сондықтан Фурье аймағындағы еркін δ_0 мүшесі бастапқы айнымалыдағы тұрақты қосылғышқа сәйкес келеді. Сұрақ. Оң жарты осьте тасымалданған шешім үшін C қандай? Жауап. $C = 0$.

Өзіндік тапсырмалар

01 $\mathcal{F}(\delta_3'')$ түрлендіруін есептеңіз.

02 $(9 - D^2)u = \delta_0$ теңдеуінің $\mathcal{S}'$-тегі шешімін Фурье арқылы табыңыз.

Қорытынды

Фурье түрлендіруі $\mathcal{S}'$ кеңістігінде дуалдық арқылы анықталады. Дифференциалдау жиілік аймағында $i\xi$-ке көбейтуге айналады.

Бақылау сұрақтары

01 $\mathcal{F}(DT) = i\xi\mathcal{F}T$ теңдігін дәлелдегенде таңба қалай анықталады?

02 $P(D)$ операторы Фурье түрлендіруінен кейін қандай көбейткішке айналады?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · II тарау, §1, 208-б.; §2, 209–213-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.