Жалпыланған функциялар

6-дәріс

Айнымалыны сызықтық ауыстыру

Ығыстыру, масштабтау және Якобиан

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. Жалпыланған функцияларға амалдар

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Аффиндік ауыстыруда Якобиан көбейткішін дұрыс қолдану.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Аффиндік ауыстыру және дельта туындылары
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

A — қайтымды $n \times n$ матрица, $b \in \mathbb{R}^n$ болсын. Егер T регуляр болса, $T(Ax+b)$ өрнегі $f(Ax+b)$ функциясына сәйкес келеді. Жұптастыру интегралында $y = Ax + b$ десек, $x = A^{-1}(y-b)$, ал $dx = |\det A|^{-1} dy$. Осыдан жалпы T үшін анықтама алынады. A қайтымды болғандықтан, түрленген сынақ функциясы тегістігі мен компакт тасымалдаушысын сақтайды.

$$\langle T(Ax+b), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|\det A|} \langle T(y), \varphi\left(A^{-1}(y-b)\right) \rangle.$$

Шығарылған мысал

$\delta(2x-4)$ үшін $A=2$, $b=-4$. Формула бойынша $\langle\delta(2x-4),\varphi\rangle=(1/2)\varphi(2)$, демек $\delta(2x-4)=(1/2)\delta_2$. Теріс коэффициент кезінде де Якобианның абсолют шамасы алынады. Мысалы, $\delta(-3x+6)=(1/3)\delta_2$.

Негізгі ұғымдар

Ығыстыруда $A = 1$, сондықтан $T(x - a)$ жұптастыруында $\varphi(y + a)$ пайда болады. Бұл таңба $f(x - a)$ графигінің оңға ығысуымен сәйкес келеді. Бірөлшемді δ' үшін тізбекті туынды ережесі қосымша a^{-1} береді: $\delta'\ (ax + b) = [a|a|]^{-1}\delta'(x + b/a)$. Оны $\varphi((y - b)/a)$ функциясын y бойынша туындылату арқылы тексеруге болады.

Аффиндік ауыстыру және δ туындылары

ТЕОРЕМА

$a \neq 0$ және $k \geq 0$ бүтін болса, $\delta^{(k)}(ax+b) = [|a|a^k]^{-1}\delta^{(k)}_{-b/a}$.

$$\delta^{(k)}(ax+b) = \frac{1}{|a|a^k}\,\delta^{(k)}_{-b/a}$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Аффиндік ауыстыру және δ туындылары

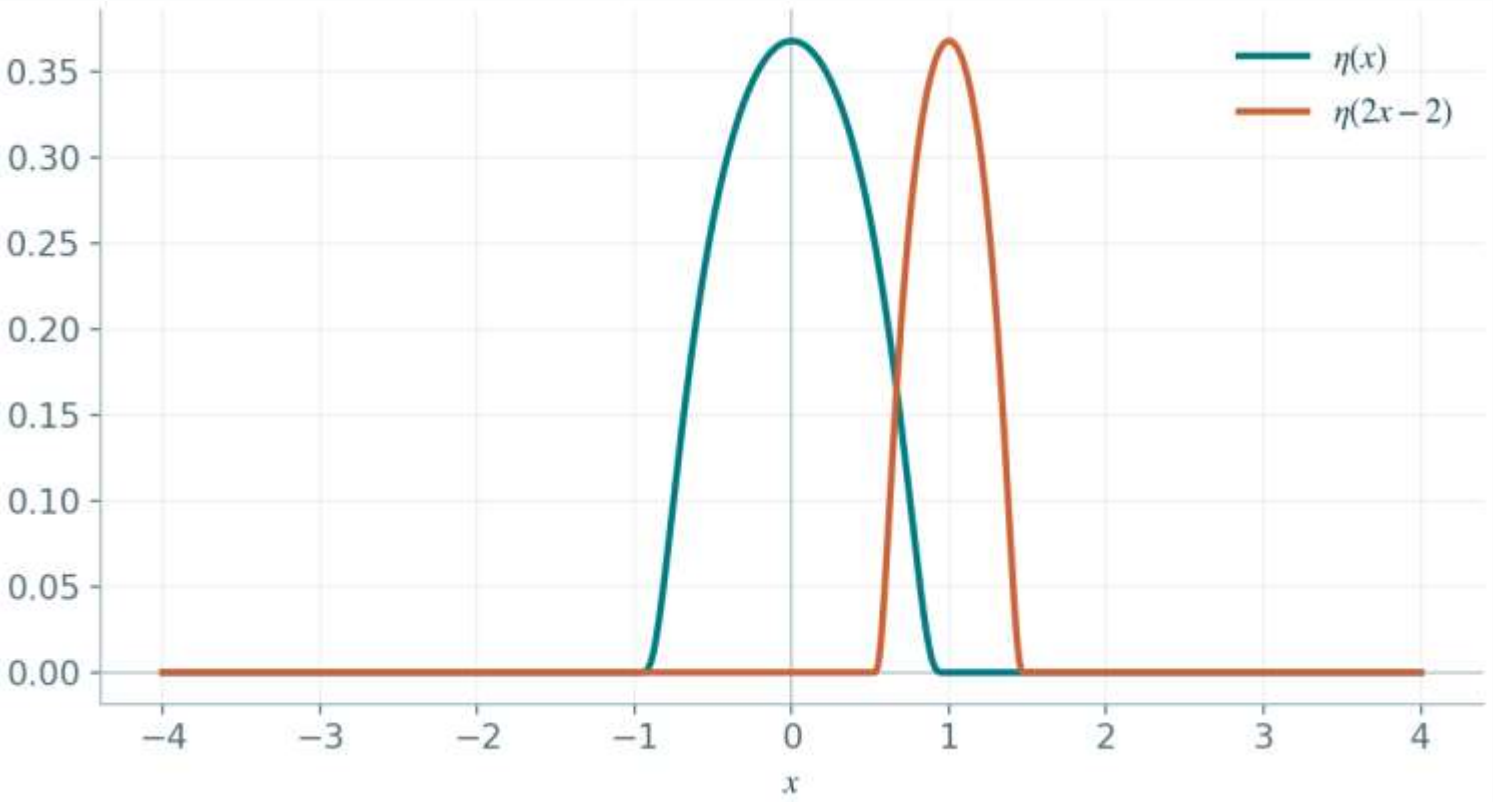
Ауыстыру анықтамасы бойынша жұптастыру $|a|^{-1}\langle\delta^{(k)}, \varphi((y-b)/a)\rangle$ болады. $\delta^{(k)}$ функционалы y бойынша k-ретті туындыны $y=0$-де алып, $(-1)^k$-ке көбейтеді.

Дәлелдеу · 2-қадам

Аффиндік ауыстыру және δ туындылары

Тізбекті туынды ережесі a^{-k} көбейткішін, ал $y = 0$ нүктесі $x = -b/a$ аргументін береді. Сонда жұптастыру $|a|^{-1}a^{-k}(-1)^k\varphi^{(k)}(-b/a)$, бұл мәлімделген формуланың оң жағы.

Сығу және ығыстыру



Графикті оқу

График $a = 2$ болғандағы сығылуды көрсетеді. $\eta(2x - 2)$ функциясының ені екі есе азаяды.

Түсіндірме

Көпөлшемді жағдайда $\delta_0(Ax+b) = |\det A|^{-1}\delta_{-A^{-1}b}$. Мысалы, $A = diag(2,3)$, $b = 0$ болса, $\langle \delta_0(Ax), \varphi \rangle = \varphi(0)/6$. Бұл мысалда екі координата бойынша қысылу коэффициенттері бір-біріне көбейтіледі.

Өзіндік жұмыс

$\delta(5-x)$ және $\delta(-2x)$ өрнектерін табыңыз. Жауап: тиісінше δ_5 және $\delta_0/2$.

Нормалау мен ығыстыруды ажырату

Нормалау мен ығыстыруды ажырату. $\delta(x-a)$ үшін аргументтің нөл болатын нүктесі a, ал оның x бойынша туындысы 1. Сондықтан масса өзгермейді. $\delta(2x-2a)$ үшін нөл болатын нүкте әлі a, бірақ аргументтің туындысы 2 болғандықтан масса екі есе азаяды. Бұл екі параметр бөлек қызмет атқарады. Біріншісі шоғырланған нүктені, екіншісі сынақ функциясы алдындағы коэффициентті анықтайды.

Аффиндік ауыстыру және дельта туындылары

Бірөлшемді $y = ax + b$ ауыстыруында интеграл өлшемі $|a|^{-1}$ коэффициентін береді. a теріс болса, интеграл шектерінің ауысуы теріс таңбаны жояды. Сондықтан $\delta(ax + b)$ үшін салмақ $|a|^{-1}$ болады. Ал δ-ның туындысына келгенде $\varphi((y - b)/a)$ өрнегін y бойынша туындылатамыз. Мұнда әр туынды үшін $\frac{1}{a}$ шығады, сондықтан a-ның таңбасы маңызды.

$$\delta^{(k)}(ax + b) = \frac{\delta^{(k)}_{-b/a}}{|a|a^k}, \qquad a \neq 0.$$

Дәлелдеу

Жұптастыруға $\delta^{(k)}$ анықтамасын қолданғанда $(-1)^k|a|^{-1}$ көбейткіші және $\varphi((y-b)/a)$ функциясының $y=0$ нүктесіндегі k-ретті туындысы шығады. Бұл туынды $a^{-k}\varphi^{(k)}(-b/a)$-ға тең. Соңғы өрнекті $\delta^{(k)}$ _$(-b/a)$ жұптастыруымен салыстырсақ, формула дәлелденеді.

Аффиндік ауыстыру және дельта туындылары

Мысалы, $\delta'(-2x+4) = -{\delta_2}'/4$. Тексеру үшін жұптастыруды есептейік. |a| $^{-1} = 1/2$, ал $\varphi(2 - y/2)$ функциясының $y = 0$-дегі туындысы $-\varphi'(2)/2$. δ'-тің минус таңбасын ескергенде нәтиже $\varphi'(2)/4$ болады. Бұл $-{\delta_2}'/4$ әсерімен сәйкес.

Аффиндік ауыстыру және дельта туындылары

Көпөлшемді жағдайда $|\det A|^{-1}$ көлемнің өзгеруін сипаттайды. Ауыстырудан кейін T-ның тасымалдаушысы $A^{-1}(\operatorname{supp} T - b)$ болады. Мұны T нөл болатын ашық жиындар мен олардың кері бейнелерін салыстыру арқылы көруге болады.

Екі ауыстыруды ретімен қолдану

Екі ауыстыруды ретімен қолдану. Алдымен $y = ax + b$, содан кейін $z = cy + d$ болсын. Құрама ауыстыру $z = cax + (cb + d)$, ал оның Якобианы |ca|. Кезекпен ауыстырғанда екі көбейткіш $|a|^{-1}$ және $|c|^{-1}$ шығады. Олардың көбейтіндісі $|ca|^{-1}$, яғни бірден ауыстырғандағы коэффициент. Мысалы, $\delta(3(2x - 1) + 4) = \delta(6x + 1) = \delta$_(-1/6)/6. Түбір мен коэффициентті әр қадамда тексеру есептегі қателерді азайтады.

Шығарылған есеп

$T(x) = \delta(3x + 6) + 2\delta'(-x - 2)$ өрнегін бір нүктеде шоғырланған стандартты түрде жазайық. Бірінші аргументтің түбірі -2 және масштаб 3. Сондықтан бірінші мүше δ_(-$2)/3$. Екінші аргументтің түбірі де -2. Мұнда $a = -1$ болғандықтан, δ' $(-x - 2) = -\delta'$_(-2). Екі мүшені қосамыз.

$$T = \frac{\delta_{-2}}{3} - 2\delta_{-2}', \qquad \langle T, \varphi \rangle = \frac{\varphi(-2)}{3} + 2\varphi'(-2).$$

Екінші есеп

$H(2-x)$ функциясының тірегін табайық. Аргумент $2-x>0$ болса, яғни $x<2$ болса, функция 1. $x>2$ кезінде нөл. Сондықтан тасымалдаушысы $(-\infty, 2]$. Жалпыланған туындысы $-\delta_2$, себебі нүктедегі секіріс $0-1=-1$. Тізбекті ережеде де сол нәтиже алынады: $-\delta(2-x)=-\delta_2$.

Өзіндік жұмыс

1) $\delta(4x-8)$ және $\delta''(-2x+4)$ өрнектерін ықшамдаңыз.

2) $T(x-a)$ өрнегін φ сынақ функциясымен жұптастыру ережесін жазыңыз.

3) $A = diag(2,-3)$, $b = (4,6)$ болғанда $\delta_0(Ax+b)$ функционалының массасы мен шоғырлану нүктесін табыңыз.

Жауаптарды тексеру

1) $\delta_2/4$ және $\delta_2''/8$. 2) $\langle T(x-a), \varphi(x)\rangle = \langle T(y), \varphi(y+a)\rangle$. 3) Массасы $\frac{1}{6}$ және нүктесі $(-2,2)$.

Қате талдау

$\delta'(2x)$ үшін $\frac{1}{2}$ коэффициентін жазу жеткілікті ме? Жоқ. Бірінші $\frac{1}{2}$ ауыстыру өлшемінен, екіншісі $\varphi(y/2)$-нің y бойынша туындысынан шығады. $\langle \delta'(2x), \varphi \rangle = -\varphi'(0)/4$. Ал x бойынша $D[\delta(2x)]$ есептелсе, нәтиже ${\delta_0}'/2$. Екі өрнектің арасындағы 2 коэффициенті тізбекті туынды ережесіне сәйкес. Тапсырма. $\delta'(-3x)$ пен $D[\delta(-3x)]$ үшін осы тексерісті қайталаңыз.

Өзіндік тапсырмалар

01 $\delta(-3x+6)$ және $\delta''(-3x+6)$ өрнектерін стандартты түрде жазыңыз.

02 $\langle T(2x-1), \varphi \rangle$ жұптастыруын T және φ арқылы жазыңыз.

Қорытынды

Аффиндік ауыстыру Якобианның модулін береді. δ-ның k-ретті туындысына тізбекті туынды ережесінен a^{-k} көбейткіші қосылады.

Бақылау сұрақтары

01 Неліктен Якобианның модулі алынады?

02 $a < 0$ кезінде δ-ның тақ ретті туындыларының таңбасы қалай өзгереді?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §1, 21–24-б.; §2, 33–37-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.