3-дәріс

Регуляр және сингуляр жалпыланған функциялар

Регуляр үлестірімдер мен Дирак дельтасы

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

1-модуль. Сынақ кеңістіктері мен функционалдар

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Жалпыланған функцияны функционал ретінде түсіндіру және Дирак дельтасының сингулярлығын дәлелдеу.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Функционалдың үздіксіздігін бағалау
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

Жалпыланған функция T сынақ функциясына $\langle T, \varphi \rangle$ санын сәйкестендіреді. Әсері сызықтық және үзіліссіз болуы керек. Үзіліссіздік дегеніміз $\varphi_j \to 0$ болғанда $\langle T, \varphi_j \rangle \to 0$. Әрбір локальді интегралданатын f функциясы төмендегі интеграл арқылы регуляр жалпыланған функция анықтайды.

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Негізгі ұғымдар

Ортақ K тасымалдаушысында $|\langle T_f, \varphi\rangle| \le \|\varphi\|_\infty \int_K |f|$, сондықтан T_f үзіліссіз. Дю Буа–Реймон леммасы бойынша $T_f = T_g$ болса, $f = g$ дерлік барлық жерде. Мұны тегістеу ядросымен де көруге болады. Интегралдық жұптастыру барлық сынақ функциясы үшін нөл болса, $f - g$-нің тегістелген нұсқалары да нөл. Локальді L^1 шегінде $f - g = 0$ шығады.

Шығарылған мысал

δ_a регуляр болсын делік. $0 \leq \eta \leq 1$ және $\eta(0) = 1$ болатын сынақ функциясын алып, $\eta_j(x) = \eta(j(x-a))$ дейік. Сонда $\langle \delta_a, \eta_j \rangle = 1$. Егер $\delta_a = T_f$ болса, осы мәндердің модулі a төңірегіндегі кішірейетін аралық бойынша $\int |f|$ интегралымен бағаланады. Интеграл нөлге ұмтылады. Қайшылық дельтаның сингуляр екенін көрсетеді.

Дирак дельтасының сингулярлығы

ТЕОРЕМА

δ_a жалпыланған функциясын ешбір $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ функциясы интеграл арқылы бере алмайды.

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Дирак дельтасының сингулярлығы

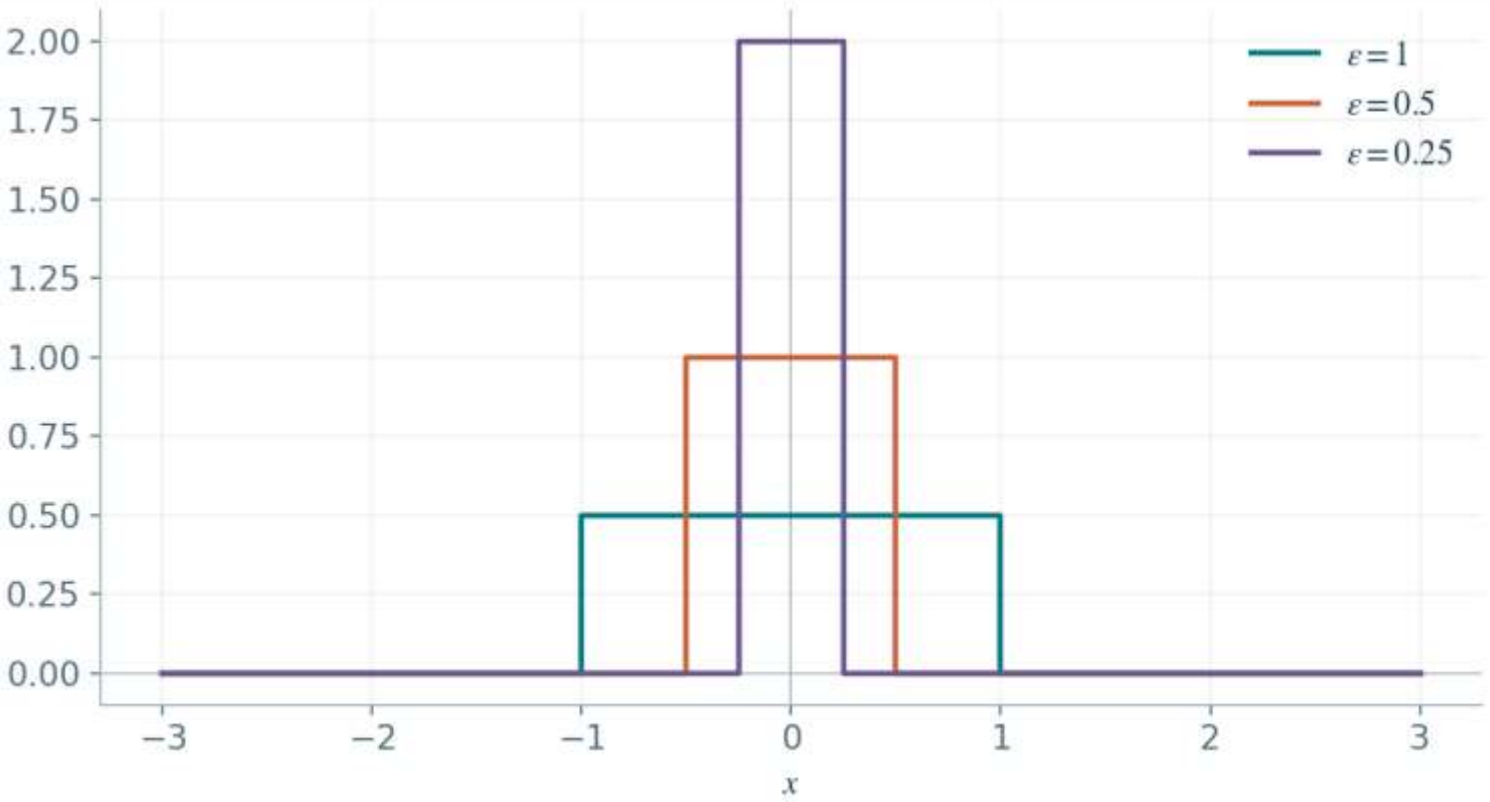
$\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $0 \le \eta \le 1$, supp $\eta \subset [-1,1]$, $\eta(0) = 1$ болсын. $\varphi_\varepsilon(x) = \eta((x-a)/\varepsilon)$ үшін $\langle \delta_a, \varphi_\varepsilon \rangle = 1$.

Дәлелдеу · 2-қадам

Дирак дельтасының сингулярлығы

Егер $\delta_a = T_f$ болса, $|\langle \delta_a, \varphi_\varepsilon \rangle| \le \int_[a-\varepsilon, a+\varepsilon]|f|$. Интегралдың абсолют үзіліссіздігінен оң жақ нөлге ұмтылады. Сол жақ 1 болғандықтан қайшылық шығады.

Дельтаға жуықтайтын ядролар



Графикті оқу

Ауданы бірдей тікбұрышты ядролар тарылған сайын биіктейді. Графикте дельтаның өзі емес, оны жуықтайтын функциялар көрсетілген.

Түсіндірме

Регуляр функционал нүктелік мәнге тәуелді болмайды. Мысалы, $f(x) = 0$ барлық $x \neq 0$ үшін және $f(0) = 5$ десек, $T_f = 0$. Ал δ_0 нөлдегі мәнді тікелей алады. Сондықтан δ_0-ді бір нүктеде 1, қалған жерде 0 болатын функциямен алмастыруға болмайды.

Өзіндік жұмыс

$H(x) = 1, x > 0$ және $H(x) = 0, x < 0$. $\langle H, \varphi \rangle = \int_0 ^\infty \varphi(x) dx$ формуласын жазыңыз және $H(0)$ мәнінің әсерін түсіндіріңіз.

Мағынаны ажырату

Мағынаны ажырату. $\langle T, \varphi \rangle$ таңбасындағы T — әсер етуші функционал, φ — сынақ функциясы, ал нәтиже — бір сан. Мысалы, $\langle \delta_2, \varphi \rangle = \varphi(2)$. Егер $\varphi(2) = 0$ болса, жұптастыру нөл. Бірақ бұл δ_2 функционалының нөл екендігін білдірмейді. Оны тексеру үшін 2 нүктесінде 1 болатын басқа сынақ функциясын таңдау керек. Демек функционалдың теңдігі бір сынақ функциясымен емес, барлық сынақ функцияларындағы әсерімен анықталады. Оқуға арналған бөлімдер · Фалалеев, §3, 14–24-б.; Бельхеева, §1.1, 8–15-б.

Функционалдың үздіксіздігін бағалау

$T \in D'$ болғанда, әрбір бекітілген K компакты үшін $C \geq 0$ және $m \geq 0$ табылып, K-да тасымалданатын барлық сынақ функциясына төмендегі баға орындалады. Мұндағы m осы K үшін қажет туындылардың ең жоғары ретін шектейді.

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{0 \leq k \leq m} \sup \left|\varphi^{(k)}\right|.$$

Бұл бағаның мағынасын кері жору арқылы көреміз

Бұл бағаның мағынасын кері жору арқылы көреміз. Егер ешбір m үшін мұндай баға болмаса, әр j үшін алғашқы j туындысының нормалары $\frac{1}{j}$- ден аспайтын, бірақ $|\langle T, \varphi_j \rangle| \geq 1$ болатын функцияны нормалау арқылы таңдай алар едік. Барлық φ_j бір K-да тасымалданады. Әрбір бекітілген k үшін $j \geq k$ болғанда оның туындысы $\frac{1}{j}$-ден аспайды. Сондықтан $\varphi_j \to 0$, ал функционалдың мәндері нөлге бармайды. Бұл үздіксіздікке қайшы.

Функционалдың үздіксіздігін бағалау

δ_a үшін $m = 0$ жеткілікті, себебі $|\varphi(a)| \leq \|\varphi\|\infty$. $\delta_a{}'$ үшін $|\langle \delta_a{}', \varphi \rangle| = |\varphi'(a)| \leq \|\varphi'\|\infty$, яғни $m = 1$ жеткілікті. Нүктенің маңында 1-ге тең χ сынақ функциясын алып, $\varphi_j(x) = j^{-1}\chi(x)\sin(j(x-a))$ десек, $\|\varphi_j\|\infty \to 0$, ал $\varphi_j{}'(a) = 1$. Сондықтан a ішкі нүкте болатын компактта $\delta_a{}'$ үшін тек φ-дің нормасына сүйенетін баға жетпейді.

Функционалдың үздіксіздігін бағалау

Регуляр функционалдың реті жергілікті түрде нөлден аспайды. Бірақ δ_a да нөлінші ретті сингуляр функционал. Демек ретті анықтау мен регулярлықты анықтау — екі бөлек тексеріс.

Жергілікті интегралдану

Жергілікті интегралдану. $f(x) = |x|^{-\alpha}$ функциясын нөл маңында қарайық, мұнда α нақты. $\alpha < 1$ болса, $\int_0^r x^{-\alpha} dx = r^{1-\alpha}/(1-\alpha)$, сондықтан f регуляр функционал береді. $\alpha = 1$ кезінде логарифмдік шашырау пайда болады, $\alpha > 1$ кезінде интеграл да шексіз. f жұп болғандықтан симметриялы кесу бұл шашырауды қысқартпайды. Ал тақ $\frac{1}{x}$ үшін оң және теріс жақтағы мүшелер бас мән анықтамасында бір-бірін өтейді.

Шығарылған есеп

$\langle T, \varphi \rangle = 2\varphi(1) - 3\varphi'(1) + \int_0^2 x\varphi(x)dx$ функционалын құрамдас бөліктерге жіктейік. Бірінші мүше $2\delta_1$-ге тең. Екінші мүше $3\delta_1{}'$, себебі $\delta_1{}'$ сынақ функциясының туындысын минус таңбасымен алады. Соңғы мүше $f(x) = x \cdot 1_{0,2}(x)$ регуляр функциясынан шығады.

$$T = 2\delta_1 + 3\delta_1{}' + T_f.$$

Үздіксіздік бағасын тікелей аламыз

Үздіксіздік бағасын тікелей аламыз. Интеграл мүшесі $|\int_0^2 x\varphi(x)dx| \le 2\|\varphi\|\infty$ теңсіздігін қанағаттандырады. Нүктелік мүшелерді қосқанда $|\langle T,\varphi\rangle| \le 4\|\varphi\|\infty + 3\|\varphi'\|\infty$. T-ның регуляр еместігін тексеру үшін алдыңғы беттегі φ_j тізбегін $a = 1$ деп қолданамыз. Регуляр бөлік пен $2\delta_1$ мүшесі нөлге ұмтылады, ал $3\delta_1{}'$ мәні -3 болып қалады. Кез келген локальді интегралданатын функция үшін ортақ компакттағы бірқалыпты нөлге ұмтылу жұптастырудың нөлге баруын талап етеді.

Өзіндік жұмыс

1) $\langle U, \varphi \rangle = \varphi(0) + \varphi(2)$ функционалын δ арқылы жазыңыз.

2) $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$, $x \neq 0$ функциясы $\mathbb{R}$-де регуляр жалпыланған функция бере ме?

3) $g(x) = 1/|x|$ үшін сол тәсіл не себептен жүрмейді?

Жауаптарды тексеру

1) $U = \delta_0 + \delta_2$. 2) Иә, $\int_0^1 x^{\frac{-1}{2}} dx = 2$. 3) Нөл маңындағы $\int_0^1 dx/x$ шашырайды. Сондықтан кәдімгі локальді интеграл арқылы функционал анықталмайды.

Қосымша есеп

$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} \varphi(x)dx - 2\varphi(0)$ болсын. T нөл ме? φ нөлдің маңында нөл, бірақ (0,1) ішінде теріс емес және нөлден өзгеше болсын. Сонда $\langle T, \varphi \rangle > 0$, яғни T нөл емес. Енді $\varphi(0) = 1$ болатын, барған сайын тарылатын сынақ функцияларын алсақ, интегралдық бөлік нөлге ұмтылады, ал $-2\varphi(0) = -2$ болып қалады. Бұл нүктелік және интегралдық бөліктерді тәжірибеде қалай ажыратынымызды көрсетеді.

Өзіндік тапсырмалар

01 $\langle T, \varphi \rangle = 3\varphi(2) + \varphi'(2)$ функционалын δ_2 және $\delta_2{}'$ арқылы жазыңыз.

02 $\alpha > 0$ үшін $f(x) = |x|^{-\alpha}$ қай кезде $\mathbb{R}$-де регуляр үлестірім анықтайтынын табыңыз.

Қорытынды

Жергілікті интегралданатын функция интеграл арқылы регуляр үлестірім береді. Дирак дельтасы сынақ функциясының нүктедегі мәнін алып, сингуляр үлестірім береді.

Бақылау сұрақтары

01 L^1_{loc} шарты функционалдың үзіліссіздігін қалай береді?

02 δ_a-ның сингулярлығын дәлелдеуде сынақ функциясының тірегі не үшін тарылады?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §1, 17–18-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.