Жалпыланған функциялар

7-дәріс

Тегіс функцияға көбейту. Бас мән

Тегіс көбейткіш және Кошидің бас мәні

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. Жалпыланған функцияларға амалдар

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Тегіс көбейткіштің әсерін есептеу және Кошидің бас мәнін түсіну.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Көбейтінді ережесі және нүктелік мүшелер
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

$g \in C\text{^}\infty(\Omega)$ болғанда $g\varphi$ тағы да сынақ функциясы болады. Бұл көбейту ережесін береді. S' кеңістігінде осы амал үшін $g\varphi \in S$ және $\varphi \mapsto g\varphi$ үзіліссіз болуы қажет. Мысалы, g көпмүше болса, бұл шарт орындалады. D'-тің екі еркін элементін көбейтуге жалпы ереже берілмейді.

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle, \qquad g\delta_a = g(a)\delta_a.$$

Шығарылған мысал

Бас мән $\mathrm{pv}(1/x)$ жұптастыруы $\int$ _$|x| > \varepsilon\ \varphi(x)/x$ dx интегралының $\varepsilon\downarrow 0$ кезіндегі шегімен анықталады. Нөлдің екі жағындағы интегралдарды біріктіргенде $\int_0$^$\infty[\varphi(t) - \varphi(-t)]/t$ dt шығады. Алым $t \to 0$ кезінде $O(t)$, сондықтан шек бар. $x \cdot \mathrm{pv}(1/x) = 1$, себебі $x\varphi$ функциясын қойғанда бөлшектегі x қысқарады. Ал $x\delta_0 = 0$, себебі $(x\varphi)(0) = 0$.

Жұптастыру арқылы $g\delta_a'$ формуласын да алуға болады

Жұптастыру арқылы $g\delta_a{}'$ формуласын да алуға болады. $\langle g\delta_a{}', \varphi\rangle = -(g\varphi)'\,(a) = -g'(a)\varphi(a) - g(a)\varphi'(a)$. Демек $g\delta_a{}' = g(a)\delta_a{}' - g'(a)\delta_a$. Бұл есепте көбейткіштің мәнімен бірге туындысы да әсер етеді.

Бас мән және шекаралық шек

ТЕОРЕМА

$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ кеңістігінде $\varepsilon \downarrow 0$ кезінде $(x+i\varepsilon)^{-1} \to \mathrm{pv}(1/x) - i\pi\delta_0$.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x+i\varepsilon} = \mathrm{pv}\,\frac{1}{x} - i\pi\delta_0$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Бас мән және шекаралық шек

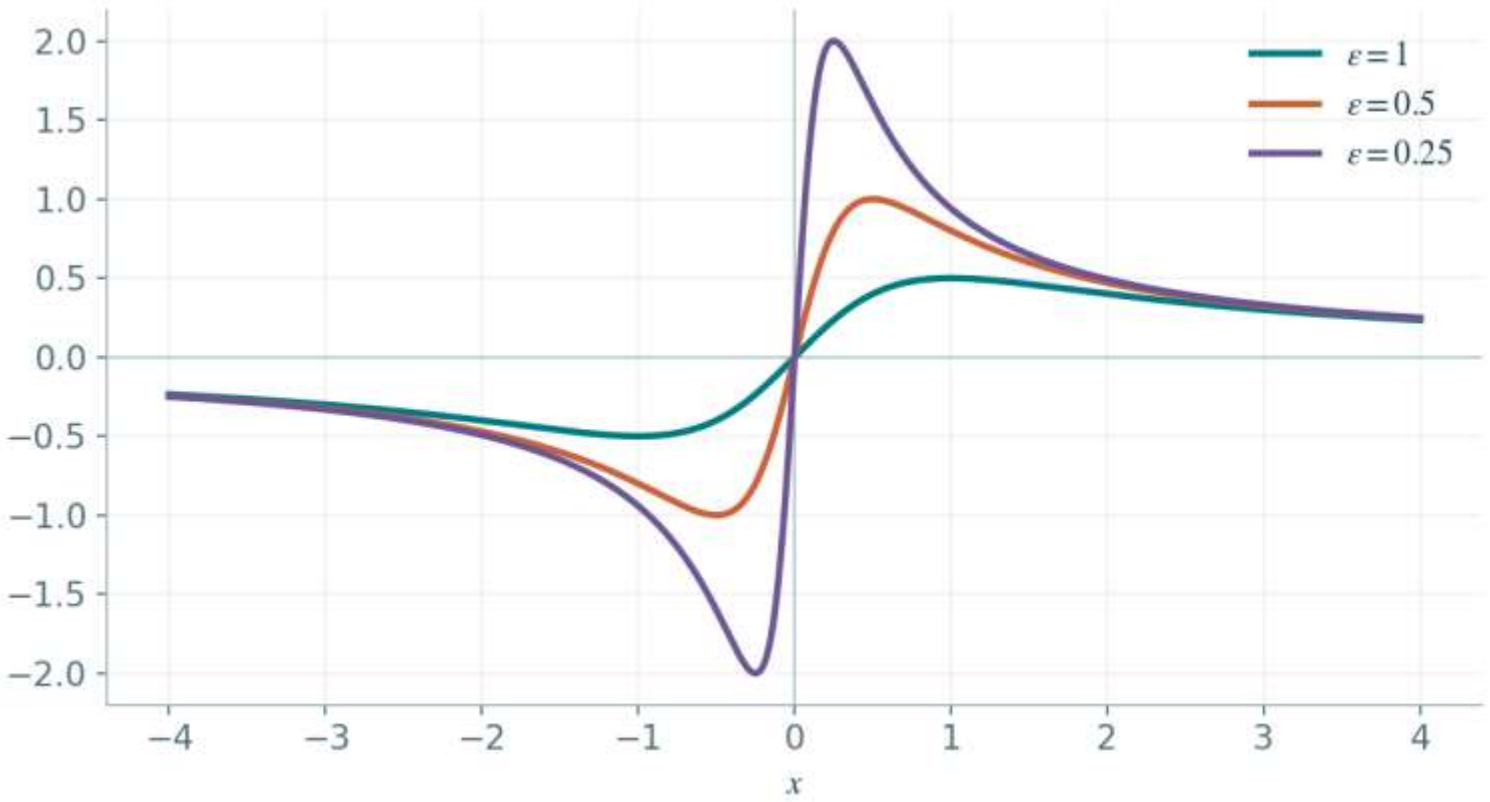
Нақты бөлік $x/(x^2+\varepsilon^2)$. Симметрия бойынша оның жұптастыруы $\int_0\infty\,[x/(x^2+\varepsilon^2)](\varphi(x)-\varphi(-x))dx$ болады. Нөл маңында айырма $O(x)$, ал сынақ функциясы компакт тасымалдаушылы. Басым жинақталу нақты бөліктің $\mathrm{pv}(1/x)$-ке ұмтылуын береді.

Дәлелдеу · 2-қадам

Бас мән және шекаралық шек

Жорамал бөлікті $x = \varepsilon y$ ауыстыруымен есептейміз: $-\int \varphi(\varepsilon y)/(1+y^2)dy$. Модульді $||\varphi||\infty/(1+y^2)$ басқарады. Шек $-\varphi(0)\int (1+y^2)^{-1}dy = -\pi\varphi(0)$. Екі шекті біріктіреміз.

Шекаралық шектің нақты бөлігі



Графикті оқу

Нақты бөлік тақ. Нөлдің екі жағындағы үлестерді бірге қарау Кошидің бас мәніне алып келеді.

Түсіндірме

Бас мәннің үзіліссіздігін де тексеруге болады. φ тасымалдаушысы $[-R, R]$ кесіндісінде жатса, орта мән теоремасынан $|\varphi(t) - \varphi(-t)| \leq 2t\|\varphi'\|_\infty$. Демек $|\langle \mathrm{pv}(1/x), \varphi \rangle| \leq 2R\|\varphi'\|_\infty$.

Өзіндік жұмыс

$xT = 1$ теңдеуінің барлық шешімін сипаттаңыз. Нұсқау: $xS = 0$ болса, $\varphi = \varphi(0)\chi + x\psi$ деп жазыңыз, мұнда $\chi(0) = 1$. Сонда $S = c\delta_0$, ал $T = \mathrm{pv}(1/x) + c\delta_0$.

Көбейтудің неге анықталғаны

Көбейтудің неге анықталғаны. g тегіс болса, $g\varphi$ функциясының тасымалдаушысы φ-дің тасымалдаушысынан аспайды. Оның туындыларын Лейбниц формуласымен жіктегенде g-дің туындылары ортақ компактта шектелген болады. Сондықтан $\varphi_j \to 0$ D кеңістігінде болса, $g\varphi_j \to 0$ D кеңістігінде. Осыдан $\langle gT, \varphi\rangle = \langle T, g\varphi\rangle$ формуласы шынында үзіліссіз функционал беретіні шығады. Мұнда g-дің шексіздіктегі өсуі D кеңістігі үшін кедергі емес.

Көбейтінді ережесі және нүктелік мүшелер

g тегіс, $T \in D'$ болсын. Жалпыланған туынды анықтамасынан көбейтінді ережесін дәлелдейміз. $\langle D(gT), \varphi \rangle = -\langle T, g\varphi' \rangle$. Енді $g\varphi' = (g\varphi)' - g'\varphi$ деп жазып, екі мүшені бөлеміз. Біріншісі $\langle DT, g\varphi \rangle$, екіншісі $\langle T, g'\varphi \rangle$. Демек классикалық көбейтінді ережесі осы жағдайда сақталады.

$$D(gT) = g\,DT + g'T.$$

Көбейтінді ережесі және нүктелік мүшелер

Осы ереже және $x\delta_0 = 0$ теңдігі $x\delta_0{}' = -\delta_0$ формуласын береді. Шынында, нөлді туындылатсақ, $0 = D(x\delta_0) = \delta_0 + x\delta_0{}'$. Тағы бір рет туындылатсақ, $x\delta_0{}'' = -2\delta_0{}'$ шығады. Жалпы $x\delta_0^{(k)} = -k\delta_0^{(k-1)}$, $k \geq 1$. Оны $\langle \delta_0^{(k)}, x\varphi \rangle$ жұптастыруынан да дәлелдеуге болады. Лейбниц ережесінде x және оның бірінші туындысы ғана қалады.

Көбейтінді ережесі және нүктелік мүшелер

Бас мәннің туындысын түсіну үшін log|x| функциясын қарайық. Ол нөл маңында локальді интегралданады. ε маңын алып тастап, екі аралықта бөліктеп интегралдағанда интегралдық мүше $\int _|x| > \varepsilon\ \varphi(x)/x$ dx түрінде шығады. Шекара мүшесі log $\varepsilon \cdot [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)]$. Айырма $O(\varepsilon)$ болғандықтан, шекара мүшесі нөлге ұмтылады. Сонымен, D log|x| $= \mathrm{pv}(1/x)$.

Көбейткіштің ретімен жоғалуы

Көбейткіштің ретімен жоғалуы. Егер $g(a) = g'(a) = 0$ болса, $g\delta_a{}' = 0$. Өйткені $\langle g\delta_a{}', \varphi\rangle = -g'(a)\varphi(a) - g(a)\varphi'(a)$. Ал $g(a) = 0$, бірақ $g'(a) \neq 0$ болса, нәтиже $-g'(a)\delta_a$ болып қалады. Мысал. $g(x) = \sin x$ және $a = 0$ үшін $g\delta_0{}' = -\delta_0$. Демек тегіс функцияға көбейткенде нүктелік туынды төменгі ретті дельтаға ауысуы мүмкін. Есепті нүктедегі мәндерге дейін қысқартуға болады.

Шығарылған есеп

$x^2T = 1$ теңдеуінің барлық шешімін табайық. $P = \mathrm{pv}(1/x)$ деп белгілейік. $xP = 1$, сондықтан туынды алғанда $P + xDP = 0$. Бұдан $x^2(-DP) = xP = 1$. Демек $T_0 = -DP$ — бір дербес шешім.

Практикум және өзіндік жұмыс

Енді $x^2 S = 0$ болатын S-терді табамыз. Нөлдің маңында 1-ге тең $\chi \in D$ таңдаңыз. Кез келген φ үшін $\varphi - \varphi(0)\chi - \varphi'(0)x\chi$ функциясы нөлде екінші ретке дейін жоғалады. Оны x^2-ге бөлсек, тағы бір тегіс компакт тасымалдаушылы функция алынады. Сондықтан S-тің әсері $\varphi(0)$ және $\varphi'(0)$ арқылы ғана өрнектеледі.

$$T = -D\mathrm{pv}\frac{1}{x} + c_0\delta_0 + c_1\delta_0{}'.$$

Тексеру

$x^2\delta_0 = 0$ және $x^2\delta_0{}' = x(-\delta_0) = 0$. Демек еркін c_0, c_1 коэффициенттері теңдеуді бұзбайды.

Өзіндік жұмыс

1) $(x-a)\delta_a{}'$ формуласын табыңыз.

2) $g(x)=e^x$ болса, $g\delta_0{}'$ көбейтіндісін есептеңіз.

3) $x^3\delta_0{}''$ және $x^2\delta_0{}''$ өрнектерін салыстырыңыз.

Жауаптарды тексеру

1) $-\delta_a$. 2) ${\delta_0}' - \delta_0$. 3) ${x^2\delta_0}'' = 2\delta_0$, ал ${x^3\delta_0}'' = 0$. Екі көбейтуді $x\delta_0^{(k)}$ ережесімен кезекпен орындаңыз.

Қосымша есеп

$(1+x^2)T = \delta_0{}'$ теңдеуін шешейік. $1+x^2$ барлық нүктеде оң, сондықтан $g(x) = 1/(1+x^2)$ — тегіс кері көбейткіш. Осыдан $T = g\delta_0{}'$. $g(0) = 1$ және $g'(0) = 0$, демек $T = \delta_0{}'$. Кері көбейткіш бар болғандықтан шешім бірмәнді. Сұрақ. Осы тәсілді $xT = \delta_0{}'$ теңдеуінде қолдануға бола ма? Жауап. x нөлде жоғалады. Бір дербес шешім $-\delta_0{}''/2$, ал оған $c\delta_0$ қосуға болады.

Өзіндік тапсырмалар

01 $x \cdot \mathrm{pv}(1/x) = 1$ екенін анықтама бойынша дәлелдеңіз.

02 $e^{2x}\delta_0''$ көбейтіндісін δ_0, δ_0', δ_0'' арқылы өрнектеңіз.

Қорытынды

Тегіс көбейткіш сынақ функциясына көшіріледі. Кошидің бас мәнінде сингулярлықтың екі жағындағы үлестер симметриялы түрде біріктіріледі.

Бақылау сұрақтары

01 Неліктен $\mathrm{pv}(1/x)$ анықтамасында $\varphi(x) - \varphi(-x)$ айырмасы шығады?

02 $(x + i\varepsilon)^{-1}$ шегіндегі $-i\pi\delta_0$ мүшесі қай бөліктен пайда болады?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §3, 64–67, 83–85-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.