Жалпыланған функциялар

15-дәріс

Деңгейлік сызықтағы дельта

Деңгейлік бет, Якобиан және беттік интеграл

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Дифференциалдық теңдеулер мен түрлендірулер

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Тегіс деңгейлік бетке шоғырланған дельта үлестірімін анықтап, салмақты Якобиан арқылы есептеу.

Дәріс жоспары

1. Анықтама мен негізгі формула
2. Теорема және дәлелдеу
3. Мысалдар және өзіндік жұмыс

Тегіс деңгейлік бет

$g(x) = 0$ теңдеуінің бойында $\nabla g \neq 0$ болса, нөлдік деңгей локал түрде тегіс бет. Бұл шарт $t = g(x)$ координатасына көшуге мүмкіндік береді.

Көлем элементінің салмағы

Деңгейге нормаль бағытта орын ауыстырғанда $dt = |\nabla g| dn$, мұндағы dn — нормаль бойындағы ұзындық элементі. Сондықтан көлем элементі $dS_t \; dt/|\nabla g|$ түрінде жазылады.

Үлестірімнің үзіліссіздігі

φ тасымалдаушысы K компактында жатсын. $K \cap \{g = 0\}$ маңында $|\nabla g|$-дің оң төменгі шегі бар, ал беттің осы бөлігінің ауданы ақырлы. Сондықтан жұптастыру $C_K \sup_K |\varphi|$ шамасымен шектеледі.

Деңгейлік сызықтағы дельта

ТЕОРЕМА

$g \in C\infty(\Omega)$, ал $g = 0$ деңгейінде $\nabla g \neq 0$ болсын. Онда $\delta(g)$ функционалы $\langle \delta(g), \varphi \rangle = \int _\{g = 0\} \varphi / |\nabla g|$ dS формуласымен беріледі.

$$\langle \delta(g), \varphi \rangle = \int_{g=0} \frac{\varphi}{|\nabla g|} \, dS$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Деңгейлік сызықтағы дельта

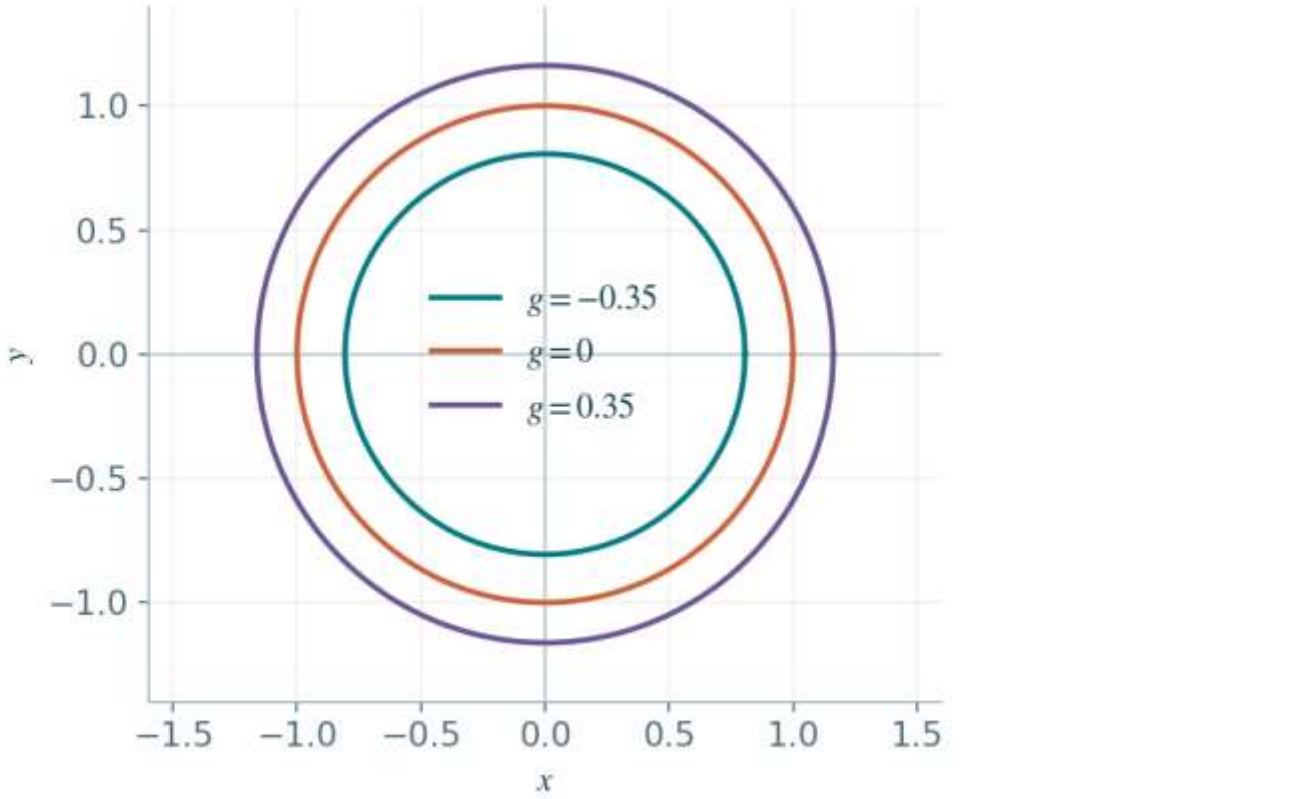
Имплициттік функция теоремасы бойынша деңгей маңында $t = g(x)$ координатасын енгіземіз. φ-дің компакт тасымалдаушысын шекті карталармен және бірлікті жіктеумен бөлеміз. Деңгейден алыс бөліктің шегі нөл, өйткені компакт тіректі дельта ядросы ол жерде ақырында нөл болады.

Дәлелдеу · 2-қадам

Деңгейлік сызықтағы дельта

Әр картада көлем элементі $dS_t\ dt/|\nabla g|$ болады. Сондықтан $\rho_\varepsilon(g)$ жұптастыруы $\int \rho_\varepsilon(t)A(t)dt$, $A(t) = \int _\{g = t\}\varphi/|\nabla g|dS_t$ түріне өтеді. Локал координаталарда A үзіліссіз, демек шек $A(0)$. Карта бойынша нәтижелерді қосамыз.

Бірлік шеңбер және көршілес деңгейлер



Графикті оқу

$g = x^2 + y^2 - 1$ үшін нөлдік деңгей бірлік шеңбер. Оның үстінде $|\nabla g| = 2$, сондықтан салмақ $\frac{1}{2}$.

Тасымалдаушы

Бетпен қиылыспайтын ашық жиында жұптастыру нөл. Ал беттің әр нүктесі маңында оң сынақ функциясын таңдасақ, беттік интеграл оң. Осыдан supp $\delta(g) = \{g = 0\}$.

Бірөлшемді түбірлер

g-нің барлық түбірі қарапайым болса, локал ауыстыру әр түбірдің үлесін $1/|g'(a)|$ салмағымен береді. Компакт тасымалдаушыда қарапайым түбірлер саны ақырлы.

Мысал · x^2-1

Түбірлері -1 және 1. Екі нүктеде де $|g'| = 2$, сондықтан $\delta(x^2 - 1) = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$.

Мысал · бірлік шеңбер

$g(x,y)=x^2+y^2-1$ үшін $\nabla g=(2x,2y)$. Бірлік шеңберде оның нормасы 2. Сондықтан жұптастыру $(1/2)\int_0^2 \pi\varphi(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ болады.

Деңгей бетіндегі ықшам тексеру

Егер сынақ функциясы шеңбердің маңында бірге тең болса, жұптастыру π. Егер сол маңда $\varphi = x$ болса, жұптастыру нөл, өйткені бір толық периодта cos θ интегралы нөл.

Шарттың рөлі

$g(x) = x^2$ үшін нөлде $g'(0) = 0$. Мұнда $1/|g'(0)|$ формуласын қолдануға болмайды. Компакт тіректі оң ядро үшін $x = \sqrt{\varepsilon}\, y$ ауыстыруы массаның $\varepsilon^{\frac{-1}{2}}$ тәртібімен өсуін көрсетеді.

Өзіндік жұмыс

$a > 0$ үшін $\delta(x^2 - a^2)$ формуласы қандай? Содан кейін $g(x, y) = y - 2x$ түзудің бойында $1/|\nabla g|$ салмағын табыңыз.

Жауапты тексеру

$\delta(x^2 - a^2) = (\delta_{-a} + \delta_a)/(2a)$. Түзу мысалында $|\nabla g| = \sqrt{5}$ және $dS = \sqrt{5}$ dx, сондықтан жұптастыру $\int \mathbb{R}\varphi(x, 2x)dx$ болады.

Өзіндік тапсырмалар

01 $\delta(x^2 - 9)$ өрнегін екі нүктелік дельта арқылы жазыңыз.

02 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ үшін φ шеңбер маңында бірге тең болса, $\langle \delta(g), \varphi \rangle$ мәнін табыңыз.

Қорытынды

$\nabla g \neq 0$ шарты деңгейлік беттің маңында $t = g(x)$ координатасын енгізеді. $\delta(g)$ бет бойымен $1/\|\nabla g\|$ салмағымен интегралданады.

Бақылау сұрақтары

01 Беттік интегралдағы $1/\|\nabla g\|$ көбейткіші қайдан шығады?

02 Неліктен қарапайым түбірлер формуласын $g(x) = x^2$ үшін қолдана алмаймыз?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · III тарау, §1, 259–276-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.