1-дәріс

Сынақ функциялары және D кеңістігі

Сынақ функциясы, тасымалдаушы және жинақталу

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

1-модуль. Сынақ кеңістіктері мен функционалдар

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Функцияның тасымалдаушысын анықтау және D кеңістігіндегі жинақтылықты тексеру.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Тасымалдаушы мен жинақталуды тексеру
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

Сынақ функциясы — жалпыланған функцияның әсерін өлшейтін көмекші функция. Ашық $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ облысында $D(\Omega) = C_c\text{^}\infty(\Omega)$ деп белгілейміз. Мұндағы c индексі тасымалдаушының Ω ішінде жатқан компакт жиын екенін көрсетеді. Тасымалдаушы — функция нөлден өзгеше болатын нүктелер жиынының тұйықталуы. Мысалы, функция шекарада нөлге тең болса да, сол шекара тасымалдаушыға кіруі мүмкін.

$$\varphi_j \to \varphi \ \text{ кеңістігінде } \mathcal{D}(\Omega) \Leftrightarrow \operatorname{supp}\varphi_j \cup \operatorname{supp}\varphi \subset K \Subset \Omega, \quad \| D^\alpha(\varphi_j - \varphi) \|_\infty \to 0 \quad (\forall \alpha)$$

Негізгі ұғымдар

Мұндағы α — теріс емес бүтін сандардан тұратын мультииндекс. Бір ортақ K барлық мүшені қамтуы тиіс. Ал туындының әрбір реті үшін бірқалыпты жинақталу бөлек тексеріледі. Ортақ компакттың болуы функционалға тек шектелген аймақтағы мәндер қажет болуын қамтамасыз етеді.

Шығарылған мысал

$\eta(x) = \exp(-1/(1-x^2))$ деп $|x| < 1$ кезінде алайық, ал сыртында нөл дейік. Шетке жақындағанда әр туынды экспонента мен $(1-x^2)^{-1}$-дің дәрежелерінен тұратын көбейтінділерге жіктеледі. Экспонента әрбір осындай дәрежеден жылдамырақ нөлге ұмтылады, сондықтан барлық туынды шекарада нөлмен жалғасады. Демек $\eta \in D(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\eta = [-1,1]$. $\frac{\eta}{j}$ тізбегі D-де нөлге жинақталады.

Сынақ функциясының тегістігі

ТЕОРЕМА

η функциясы $(-1,1)$ аралығында $\exp(-1/(1-x^2))$, ал сыртында нөл болсын. Онда $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\eta = [-1,1]$.

$$\eta(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right), \quad |x| < 1$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Сынақ функциясының тегістігі

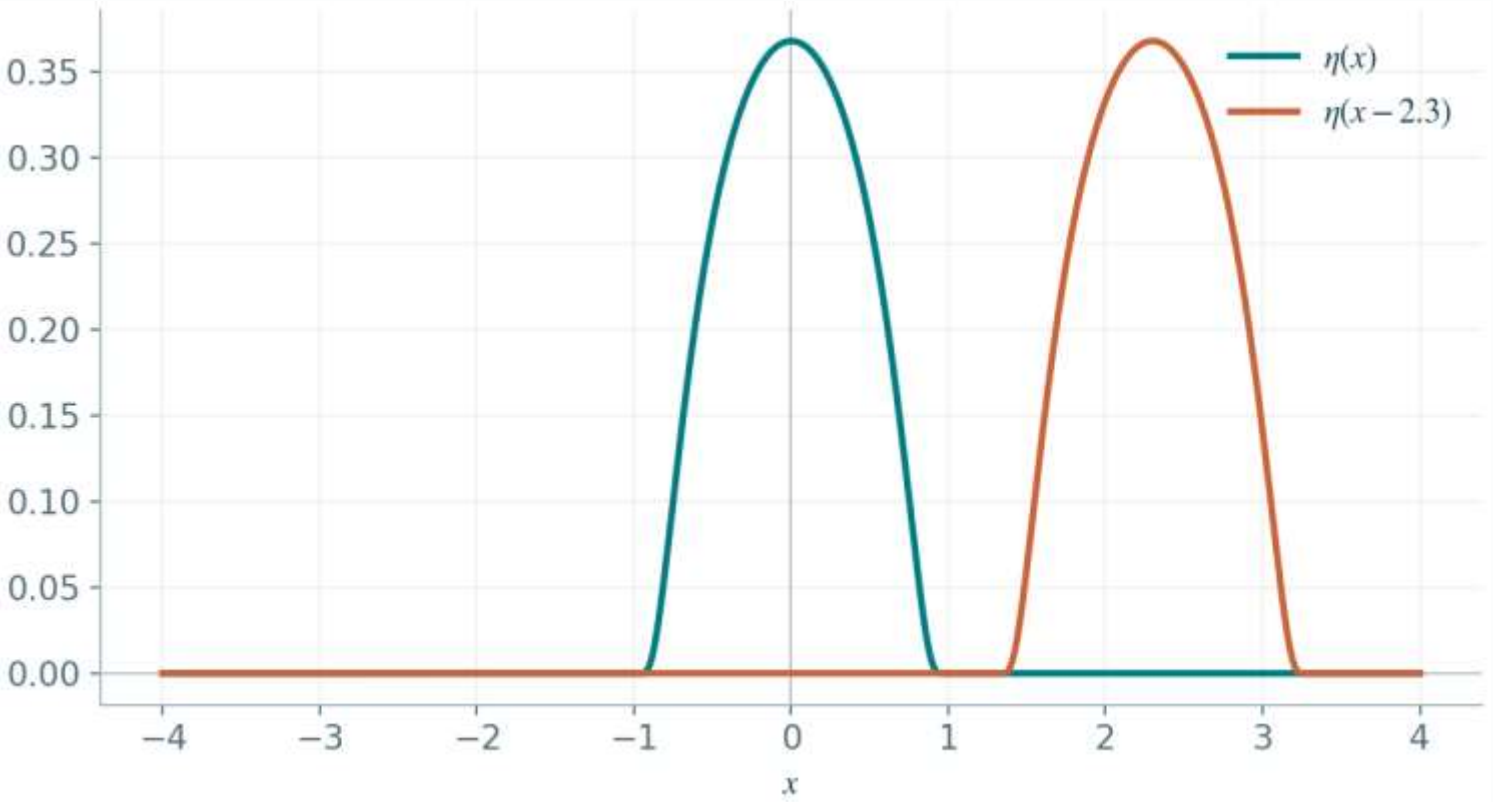
Ішкі аралықта $s = (1 - x^2)^{-1}$ деп аламыз. $s' = 2xs^2$. Индукциямен $\eta^{(k)}(x) = P_k(x,s)e^{-s}$, мұнда $P_0 = 1$ және $P_{k+1} = \partial_x P_k + 2xs^2(\partial_s P_k - P_k)$.

Дәлелдеу · 2-қадам

Сынақ функциясының тегістігі

$x \to \pm 1$ кезінде $s \to \infty$, ал $|x| \leq 1$. Сондықтан әрбір P□(x,s)e⁻ˢ нөлге ұмтылады. Нөлмен жалғасқан әр туындының шекарадағы туындысы да нөл: орта мән теоремасын ішкі нүкте мен шекараның арасына қолданамыз. Осыны рет бойынша қайталау $\eta \in C\infty$ екенін береді.

Компакт тасымалдаушылы функциялар



Графикті оқу

Графикте η және оның көлденең ығысуы берілген. Қисықтардың тіректері ажыраса да, екеуі де сынақ функциясы.

Түсіндірме

Жинақталу шартының екінші бөлігі де маңызды. Мысалы, $\psi_j(x) = \eta(x)\sin(jx)/j$ функциялары бір компактта тасымалданады және өздері бірқалыпты нөлге ұмтылады. Бірақ $\psi_j'(0) = \eta(0)$ барлық j үшін, сондықтан бірінші туындылар нөлге бірқалыпты жинақталмайды.

Өзіндік жұмыс

$\varphi_j(x) = \eta(x - j)/j$ тізбегі D-де нөлге жинақтала ма? Жауап: жинақталмайды, өйткені $[j - 1, j + 1]$ кесінділері бір ортақ компактқа сыймайды.

Анықтаманың мағынасы

Сынақ функциясын өлшеу терезесі деп елестетейік. Егер оның тасымалдаушысы (a,b) ішінде жатса, ол функционалдың сол аралықтағы әсерін ғана байқайды. Нөлге тең болатын нүктелер мен тасымалдаушының сыртындағы нүктелерді ажыратыңыз. Мысалы, $x\eta(x)$ нөл нүктесінде нөл, бірақ нөлді қамтитын кез келген аралықта нөлден өзгеше мәндері бар. Сондықтан 0 оның тасымалдаушысына кіреді. Мұндай айырмашылық тасымалдаушының тұйықталу арқылы анықталуынан шығады. Оқуға арналған бөлімдер · Фалалеев, §1, 5–8-б.; Бельхеева, §1, 5–8-б.

Анықтаманы екі қадаммен қолданамыз

Анықтаманы екі қадаммен қолданамыз. Алдымен әр функция қай жерде нөлге тең екенін қараймыз. Содан кейін тасымалдаушылардың барлығы облыстың ішінде жатқан бір компактқа сыятынын тексереміз. Мысалы, $\Omega = (0,1)$ облысында $[1/4,3/4]$ жарамды компакт. Ал $[0,1/2]$ жарамайды, себебі 0 нүктесі Ω-ға кірмейді.

Тасымалдаушы мен жинақталуды тексеру

Тегіс функцияны қажетті нүктенің айналасында құру үшін бірінші беттегі η функциясын пайдаланамыз. $a \in \Omega$ болсын. $[a-r, a+r] \subset \Omega$ болатындай $r > 0$ таңдайық. Сонда $\eta((x-a)/r)/\eta(0)$ функциясының a нүктесіндегі мәні 1 және тасымалдаушысы $[a-r, a+r]$. Мұндай таңдау кейін δ_a функционалының әсерін тікелей тексеруге мүмкіндік береді.

$$\varphi_j(x) = \frac{\eta(x)\sin(jx)}{j^2}.$$

Тасымалдаушы мен жинақталуды тексеру

Осы тізбектің өзі де, бірінші туындысы да бірқалыпты нөлге ұмтылады. Шынында, бірінші туындыдағы екі қосылғыш $j^{-2}\eta'(x)\sin(jx)$ және $j^{-1}\eta(x)\cos(jx)$ түрінде. Ал екінші туындыда $-\eta(x)\sin(jx)$ мүшесі қалады. $x_j = \pi/(2j)$ нүктесін алсақ, осы мүше $-\eta(x_j) \to -\eta(0)$ болады, қалғандары нөлге ұмтылады. Сондықтан $\varphi_j \to 0$ теңдігі D кеңістігінде орындалмайды.

Тасымалдаушы мен жинақталуды тексеру

Ортақ компакт ішіндегі жинақталу үшін әр туындыны жеке тексереміз. Егер $\varphi_j = c_j\eta$ және $c_j \to 0$ болса, онда $\sup|\varphi_j^{(k)}| = |c_j|\sup|\eta^{(k)}| \to 0$ әрбір бекітілген k үшін. Мұнда туынды реті j-ге тәуелді болып өзгермейді.

Тасымалдаушы мен жинақталуды тексеру

Қосымша дәлел. $\varphi, \psi \in D(\Omega)$ болса, $\operatorname{supp}(\varphi\psi) \subset \operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi$. Шынында, екі тасымалдаушының кемінде біреуінен тыс жатқан нүктенің маңында сәйкес функция түгел нөл. Қиылыс компакт болғандықтан $\varphi\psi$ тағы да $D(\Omega)$-ға жатады. Ал $\varphi + \psi$ үшін тасымалдаушы бірігудің ішінде жатады. Теңдік әрдайым шықпайды. Мысалы, $\psi = -\varphi$ десек, қосынды нөл болады. Осы қасиеттер арқылы бірнеше жергілікті сынақ функциясын бір есепте біріктіруге болады.

Шығарылған есеп

$\Omega = (0,1)$ және $a = 1/2$ болсын. a нүктесінде 1-ге тең, тасымалдаушысы $[1/4,3/4]$ кесіндісінде жатқан сынақ функциясын табайық. Алдыңғы беттегі құрылымда $r = 1/4$ таңдаймыз. Сонда $\psi(x) = \eta(4x-2)/\eta(0)$. $x = 1/2$ кезінде аргумент нөл. $|4x-2| \geq 1$ болғанда функция нөл. Бұл теңсіздік $x \leq 1/4$ немесе $x \geq 3/4$ шарттарына парапар.

$$\psi(1/2) = 1, \qquad \operatorname{supp}\psi = [1/4\,, 3/4].$$

Екінші есеп

$\psi_j(x) = j^{-1}\eta(x/j)$ тізбегін $\mathbb{R}$-де қараймыз. k-ретті туындысы $j^{-k-1}\eta^{(k)}(x/j)$ болғандықтан, барлық туындылары бірқалыпты нөлге ұмтылады. Бірақ $\operatorname{supp}\psi_j = [-j, j]$. Демек тізбек $D(\mathbb{R})$-де жинақталмайды. Бұл есепте дәл қай шарттың бұзылғанын анықтадық.

Өзіндік жұмыс

1) $\eta(x)$ және $\eta(x-3)$ функцияларының қосындысының тасымалдаушысын табыңыз. Екі жабық аралықтың қиылыспайтынын пайдаланыңыз.

2) $\Omega = (0,1)$ үшін $\eta(4jx-2)$ функцияларының тасымалдаушысын табыңыз. Олар бір ортақ $K \subset \Omega$ компактына сия ма?

3) Бекітілген $\varphi, \psi \in D(\Omega)$ және $a_j \to a$, $b_j \to b$ үшін $a_j\varphi + b_j\psi$ тізбегінің $D(\Omega)$-де жинақталуын дәлелдеңіз.

Жауаптарды тексеру

1) $[-1,1] \cup [2,4]$. 2) $[1/(4j), 3/(4j)]$, сол жақ ұшы 0- ге жақындайды. 3) $K = \operatorname{supp} \varphi \cup \operatorname{supp} \psi$ алынады. Әрбір туынды айырмасының нормасы екі коэффициент айырмасының модульдері арқылы бағаланады.

Қате талдау

«$\varphi_j(x)$ барлық x үшін нөлге ұмтылса, $\varphi_j \to 0$ D кеңістігінде» деген пайымды тексеріңіз. $\varphi_j(x) = \eta(jx)$ үшін $x \neq 0$-де нүктелік шек нөл, бірақ $\varphi_j(0) = \eta(0)$. Тіпті осы ерекшелікті жойып, $\eta(jx - 2)$ алсақ, әрбір x үшін нүктелік шек нөл болады, алайда максимум өзгермейді. Максимум $x = 2/j$ нүктесінде алынады. Демек нүктелік жинақталу бірқалыпты жинақталуды қамтамасыз етпейді.

Өзіндік тапсырмалар

01 $\eta(x)$ арқылы тасымалдаушысы [1,3], ал $x = 2$ нүктесіндегі мәні 1 болатын сынақ функциясын құрыңыз.

02 $\eta(x)\sin(nx)/n$ тізбегінің өзі мен бірінші туындысының шектерін салыстырыңыз.

Қорытынды

$\mathcal{D}(\Omega)$ сынақ функциялары тегіс және компакт тасымалдаушылы. Жинақталу үшін ортақ компакт пен барлық туындылардың бірқалыпты жинақталуы қажет.

Бақылау сұрақтары

01 Функцияның тасымалдаушысы қалай анықталады?

02 Нүктелік жинақталу неліктен $\mathcal{D}$-де жинақталуға жеткіліксіз?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §1, 14–16-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.