5-дәріс

D′ және S′ кеңістіктері. Әлсіз жинақталу

Әлсіз шек және дельта тәрізді тізбектер

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

1-модуль. Сынақ кеңістіктері мен функционалдар

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Жалпыланған функциялар тізбегінің шегін сынақ функциялары арқылы есептеу.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Дельта тәрізді тізбектердің шегін бағалау
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

D' — D кеңістігінің үзіліссіз сызықтық функционалдары. S' — S кеңістігінің үзіліссіз сызықтық функционалдары. S' элементтері баяу өсетін жалпыланған функциялар деп аталады. D кеңістігі S-де тығыз, сондықтан S' функционалы өзінің D-дегі әсерімен бірмәнді анықталады. Жалпыланған функциялардың әлсіз жинақталуын тексергенде сынақ функциясы бекітіледі.

$$T_j \to T \Leftrightarrow \langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \qquad (\forall \varphi \text{ сынақ функциясы}).$$

Негізгі ұғымдар

Дельта тәрізді тізбек құру үшін $\rho \geq 0$, $\rho \in D(\mathbb{R})$, $\int \rho = 1$ деп аламыз. $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\rho(x/\varepsilon)$ биіктігі өскен сайын тарылып, толық массасы 1 күйінде қалады. $x = \varepsilon y$ ауыстыруынан жұптастыру $\int \rho(y)\varphi(\varepsilon y)dy$ болады. $\varphi(\varepsilon y) \to \varphi(0)$, ал интеграл астындағы өрнекті $\|\varphi\|\infty\rho(y)$ мажоранттайды. Лебегтің мажорантты жинақталу теоремасынан шек $\varphi(0)$ болады. Бұл дәлел D' үшін де, S' үшін де жарайды.

Шығарылған мысал

$\rho_\varepsilon = (2\varepsilon)^{-1} \cdot 1_[-\varepsilon, \varepsilon]$ алайық. Оның жұптастыруы φ-дің $[-\varepsilon, \varepsilon]$ кесіндісіндегі орташа мәні. Үзіліссіздік бойынша бұл орташа мән $\varphi(0)$- ге ұмтылады. Мұнда ядроның өзі үзілісті болса да, дельтаға жинақталу орындалады.

Дельта тәрізді тізбек

ТЕОРЕМА

$\rho \in L^1(\mathbb{R})$, $\int \rho = 1$ болса, $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\rho(x/\varepsilon)$ тізбегі $\varepsilon \downarrow 0$ кезінде $\mathcal{D}'$ және $\mathcal{S}'$ кеңістіктерінде δ_0-ге әлсіз жинақталады.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x)\, dx = \varphi(0)$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Дельта тәрізді тізбек

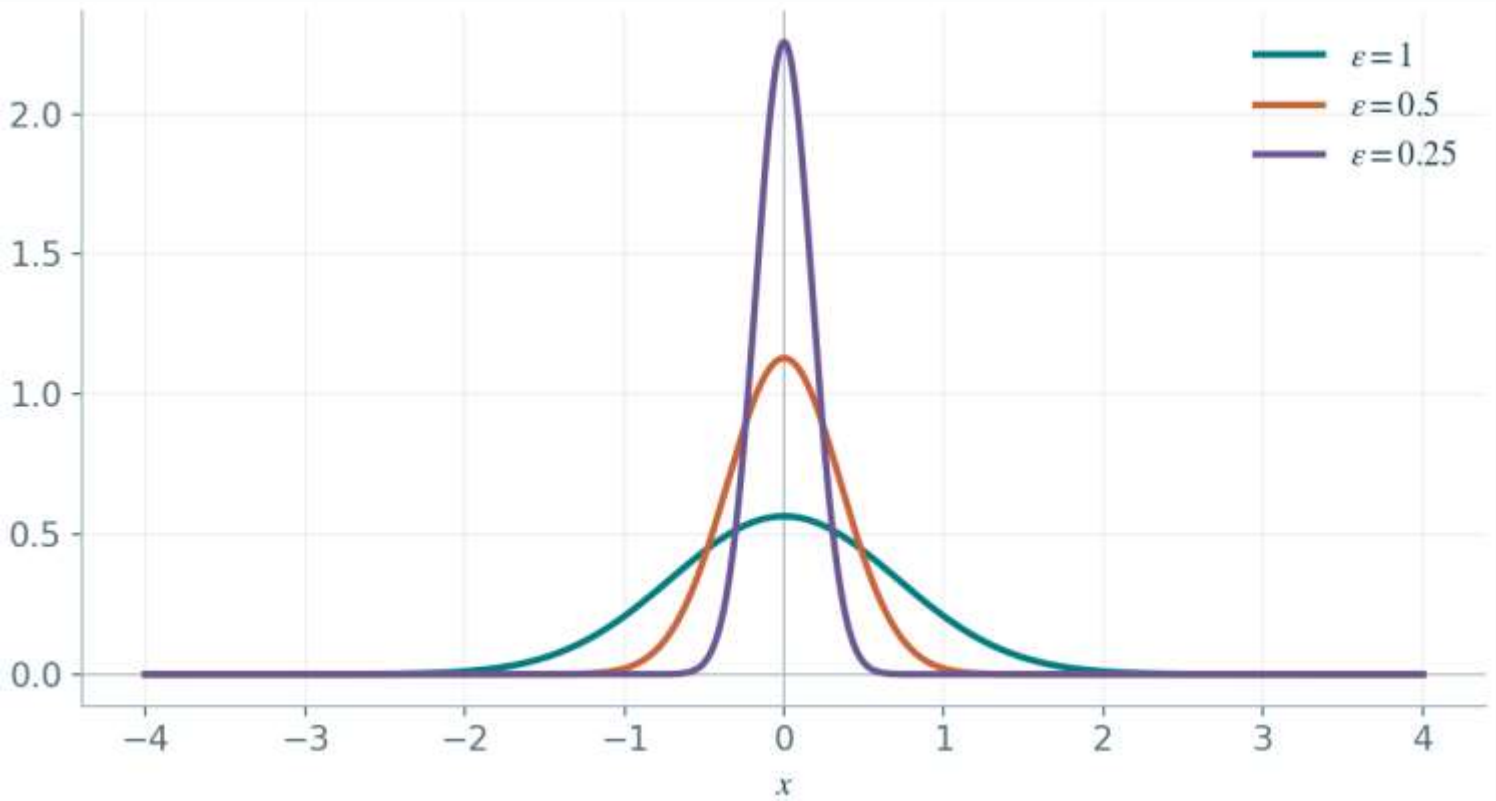
$x = \varepsilon y$ деп ауыстырғанда жұптастыру $\int \rho(y)\varphi(\varepsilon y)dy$ түріне келеді. Әр y үшін $\varphi(\varepsilon y) \to \varphi(0)$.

Дәлелдеу · 2-қадам

Дельта тәрізді тізбек

Интеграл астындағы модульді $||\varphi||\infty|\rho(y)|$ басқарады. Бұл функция интегралданады. Лебегтің басым жинақталу теоремасы бойынша шек $\varphi(0)\int \rho = \varphi(0)$. Екі кеңістіктің сынақ функциялары да шектелген, сондықтан дәлел екеуіне жарайды.

Массасы бірге тең Гаусс ядролары



Графикті оқу

Әр Гаусс ядросының ауданы 1. ε азайғанда масса нөл маңына жиналады.

Түсіндірме

Дельтаға жинақталу үшін ядроның биіктігі жалғыз өлшем бола алмайды. Егер ρ_ε орнына $\varepsilon\rho_\varepsilon$ алсақ, оның массасы ε-ге тең, сондықтан жаңа тізбек нөлге жинақталады. Жалпы $a\rho_\varepsilon$ тізбегінің шегі $a\delta_0$ болады.

Өзіндік жұмыс

$\rho_\varepsilon(x-a)$ шегін табыңыз. Жауап: δ_a, өйткені жұптастыру $\int \rho(y)\varphi(a+\varepsilon y)dy$ болады.

Әлсіз жинақталуды тексеру реті

Әлсіз жинақталуды тексеру реті. Алдымен сынақ функциясын бекітеміз, содан кейін $\langle T_j, \varphi \rangle$ мәнін нақты интегралға немесе қосындыға айналдырамыз. Шек алынған соң нәтижені белгілі функционалмен салыстырамыз. Мысалы, $\langle \delta_{1/j}, \varphi \rangle = \varphi(1/j) \to \varphi(0)$, сондықтан $\delta_{1/j} \to \delta_0$. Ал δ_j үшін D'-те шек нөл, себебі сынақ функциясының тасымалдаушысы шектелген. S'-те де шек нөл, бірақ мұнда $\varphi(j) \to 0$ қасиеті φ-дің тез кемуінен шығады. Оқуға арналған бөлімдер · Фалалеев, §5, 27–32-б.; Бельхеева, §1.2, 16–28-б.

Дельта тәрізді тізбектердің шегін бағалау

Массасы 1 ядроның дельтаға жинақталуын сандық түрде бағалауға болады. $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ және $\int \rho = 1$ болсын. Бірінші абсолют моменті $\int |y\rho(y)|$ dy ақырлы деп алайық. $\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)$ айырмасына орта мән теоремасын қолдансақ, $|\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)| \leq \varepsilon |y| \|\varphi'\|\infty$.

$$|\langle \rho_\varepsilon - \delta_0, \varphi \rangle| \leq \varepsilon \parallel \varphi' \parallel_\infty \int_{\mathbb{R}} |y\rho(y)| \, dy.$$

Дельта тәрізді тізбектердің шегін бағалау

Егер ρ жұп және екінші абсолют моменті ақырлы болса, жақсартылған баға шығады. Тейлор формуласы бойынша $\varphi(\varepsilon y) = \varphi(0) + \varepsilon y\varphi'(0) + R(y)$, мұнда $|R(y)| \le \varepsilon^2 y^2 \|\varphi''\|\infty/2$. ρ жұп болғандықтан $\int y\rho(y)dy = 0$. Сондықтан қалдықтың бағасы ε^2 ретіне түседі. Бұл тұжырым әр бекітілген сынақ функциясына қолданылады.

Дельта тәрізді тізбектердің шегін бағалау

Мысал ретінде $\rho(y) = 1/2$, $|y| \le 1$, ал сыртында нөл болсын. Екінші моменті $\int_{-1}^{1} y^2/2\, dy = 1/3$. Демек $|\langle \rho_\varepsilon - \delta_0, \varphi \rangle| \le \varepsilon^2 \|\varphi''\|_\infty / 6$. Ядроның шекарада үзілісті болуы есепке кедергі келтірмейді.

Әлсіз жинақталу нүктелік жинақталудан өзгеше

Әлсіз жинақталу нүктелік жинақталудан өзгеше. Мұнда шек сынақ функциясымен интегралдағаннан кейін алынады. Мысалы, берілген ядроның мәні әр бекітілген $x \neq 0$ үшін ақырында нөл болады. Бірақ толық массасы өзгермейді, сондықтан функционалдық шегі δ_0.

Дельта тәрізді тізбектердің шегін бағалау

Масса шартынан басқа не керек? $\rho_j(x) = \rho(x - j)$ ядроларының әрқайсысының интегралы 1 болғанымен, олар дельтаға жинақталмайды. D'-те кез келген бекітілген сынақ функциясымен жұптастыру j үлкен болғанда нөл, себебі тасымалдаушылар ажырайды. Массаның қай нүктенің маңына шоғырланатыны маңызды. Ал $\rho_\varepsilon(x - a)$ ядросында масштаб тарылып, центр a болып қалады. Осыдан жұптастырудың шегі $\varphi(a)$ шығады.

Шығарылған есеп

$f_\varepsilon(x) = x^2 e^{-x/\varepsilon} H(x)/(2\varepsilon^3)$ тізбегін қарайық. $x = \varepsilon y$ ауыстыруы жұптастыруды $(1/2)\int_0$^∞ $y^2 e^{-y} \varphi(\varepsilon y) dy$ түріне келтіреді. Екі рет бөліктеп интегралдағанда $\int_0$^$\infty y^2 e^{-y} dy = 2$. Ал интеграл астындағы функция $(1/2) y^2 e^{-y} \|\varphi\|\infty$ арқылы бағаланады. Демек $f_\varepsilon \to \delta_0$.

Енді туындының шегін табайық

Енді туындының шегін табайық. x^2 көбейткіші нөлде жоғалады, сондықтан $f_\varepsilon{}'$ есептегенде H' туғызатын дельта коэффициенті нөл.

$$-f_\varepsilon{}' = \frac{x(x-2\varepsilon)e^{-x/\varepsilon}H(x)}{2\varepsilon^4} \to -\delta_0{}'.$$

Таңбаны жұптастырумен тексереміз

Таңбаны жұптастырумен тексереміз. $\langle -f_\varepsilon{}', \varphi \rangle = \langle f_\varepsilon, \varphi' \rangle \to \varphi'(0) = \langle -\delta_0{}', \varphi \rangle$. Осылайша интегралдық шектен туындының шегін бірден алдық.

Өзіндік жұмыс

1) $\varepsilon^{-1}1_{a,a+\varepsilon}$ тізбегінің шегін табыңыз.

2) Сол тізбектің жалпыланған туындысын дельталар айырмасы арқылы жазыңыз.

3) Туындылар тізбегінің шегін φ көмегімен тікелей есептеңіз.

Жауаптарды тексеру

1) δ_a. 2) $(\delta_a - \delta_{a+\varepsilon})/\varepsilon$. 3) Жұптастыру $[\varphi(a) - \varphi(a+\varepsilon)]/\varepsilon \to -\varphi'(a)$, сондықтан шегі ${\delta_a}'$.

Қосымша есеп

$(\delta_\varepsilon - \delta_\varepsilon)/(2\varepsilon)$ өрнегінің шегін табайық. Жұптастыру $[\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)]/(2\varepsilon)$ болады. Симметриялы айырым $\varphi'(0)$-ге ұмтылады. ${\delta_0}'$ анықтамасында минус таңбасы тұрғандықтан, шек $-{\delta_0}'$. Егер алымдағы екі дельтаның орындарын ауыстырсақ, шек ${\delta_0}'$ болады. Бұл есепте әрбір δ жеке-жеке δ_0-ге ұмтылады, бірақ олардың айырмасын ε-ге бөлу арқылы бірінші туынды туралы ақпарат аламыз.

Өзіндік тапсырмалар

01 $\rho_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}\mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}(x)$ үшін δ_0-ге жинақталуды дәлелдеңіз.

02 $(\delta_0 - \delta_\varepsilon)/\varepsilon$ тізбегінің шегін жұптастыру арқылы табыңыз.

Қорытынды

Әлсіз жинақталу әрбір сынақ функциясымен жұптастыру арқылы тексеріледі. Интегралы бірге тең масштабталған ядролар δ_0-ге жинақталады.

Бақылау сұрақтары

01 Дельта ядросының $\int \rho = 1$ шарты қандай рөл атқарады?

02 Үлестірімнің туындысы әлсіз шекпен қалай ауысады?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §2, 52–57-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.