Жалпыланған функциялар

4-дәріс

Тасымалдаушы және жалпыланған функциялардың теңдігі

Жеңгілікті теңдік және сингуляр тасымалдаушы

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

1-модуль. Сынақ кеңістіктері мен функционалдар

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Ашық жиындағы теңдікті анықтау және сингуляр мүшелердің орналасуын табу.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Жергілікті теңдік және шекара нүктелері
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

T жалпыланған функциясы U ашық жиынында нөлге тең дейміз, егер U ішінде тасымалданған әрбір φ үшін $\langle T, \varphi \rangle = 0$ болса. U жиынындағы T және S теңдігі $T - S$-тің сол жиында нөлге тең болуымен анықталады. Нөлге тең болатын барлық ашық жиындардың бірігуі — T жоғалатын ең үлкен ашық жиын. Бұл тұжырым бірлік жіктеуін қолдануға сүйенеді. Кез келген сынақ функциясының компакт тасымалдаушысын ақырлы ішкі жабынмен жауып, функцияны соған сай қосылғыштарға бөлеміз.

$$\operatorname{supp} T = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \{U : U \text{ ашық}, \ T|_U = 0\}.$$

Шығарылған мысал

$T = \delta_0 - \delta_2$ болсын. 0 мен 2-ні қамтымайтын ашық жиында T жоғалады. 0 маңында $\varphi(0) = 1$ және $\varphi(2) = 0$ болатын φ таңдасақ, $\langle T, \varphi \rangle = 1$. 2 маңында керісінше $\langle T, \varphi \rangle = -1$ аламыз. Демек supp T ={0,2}. Ал H функциясының тасымалдаушысы $[0, \infty)$, себебі оң жарты осьтегі әр ашық аралықта интегралы оң сынақ функциясын таңдауға болады.

Негізгі ұғымдар

Жалпыланған функцияның бүкіл осьте нөл екенін тексеру үшін оның ашық жабынның әр бөлігінде нөл екенін көрсету жеткілікті. Бұл қасиет секіріс нүктелерін бөлек зерттеуге мүмкіндік береді.

Туындының тасымалдаушысы

ТЕОРЕМА

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ болса, supp $\partial^\alpha T \subset \operatorname{supp} T$.

$$\operatorname{supp}(\partial^\alpha T) \subseteq \operatorname{supp}(T)$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Туындының тасымалдаушысы

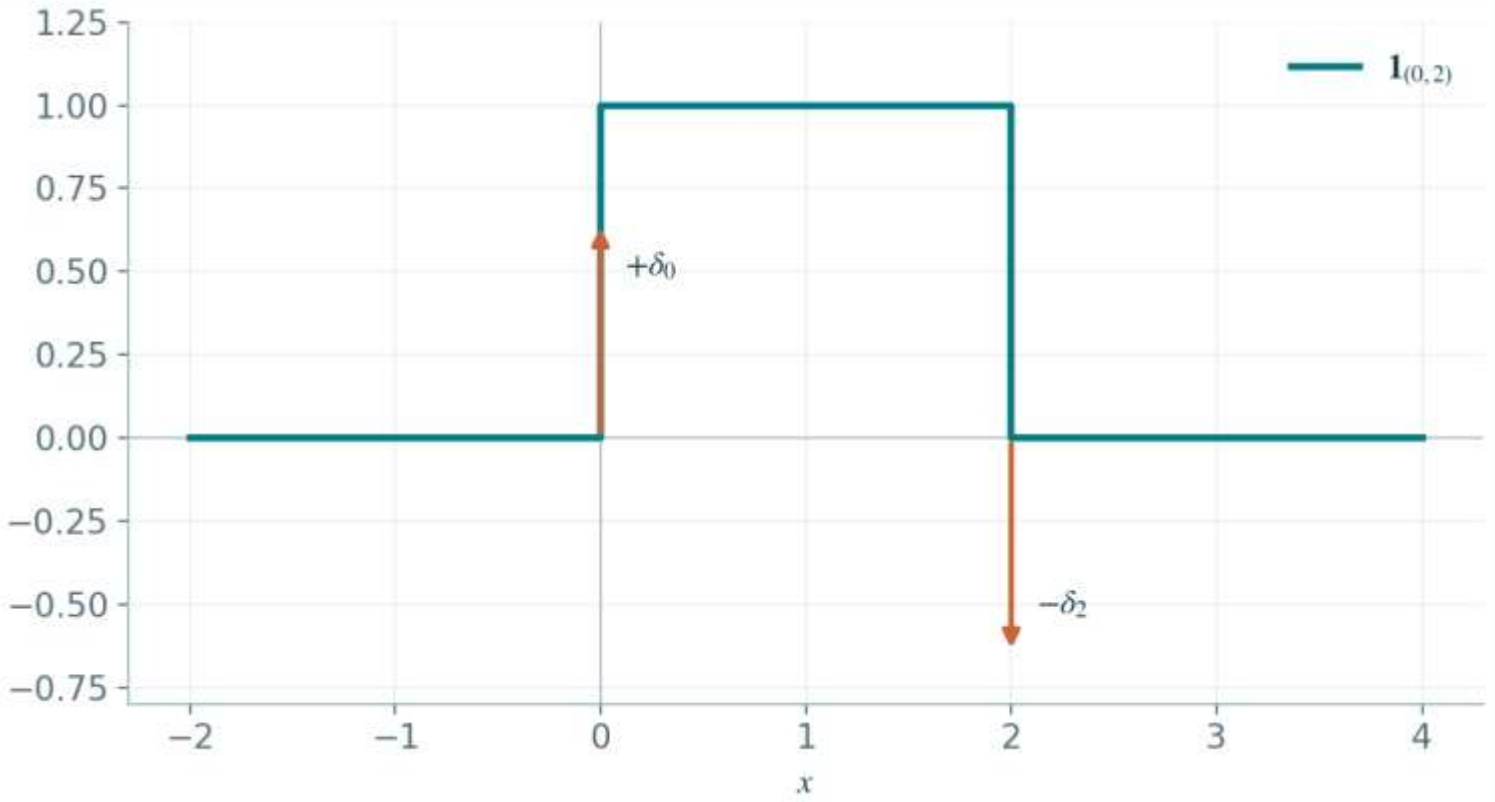
$U = \Omega \setminus \operatorname{supp} T$ деп аламыз. Кез келген $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ үшін $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(U)$, өйткені φ ашық маңда нөл болса, оның барлық туындысы да сол маңда нөл.

Дәлелдеу · 2-қадам

Туындының тасымалдаушысы

Сондықтан $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)\text{^}|\alpha| \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = 0$. Демек $\partial^\alpha T$ ашық U жиынында нөл. Анықтама бойынша supp $\partial^\alpha T$ жиыны U-мен қиылыспайды.

Функция және туынды тасымалдаушысы



Графикті оқу

Индикатордың тасымалдаушысы тұтас [0,2] кесіндісі. Оның туындысының тасымалдаушысы екі шеткі нүктеден тұрады.

Түсіндірме

Тасымалдаушы мен сингуляр тасымалдаушыны ажыратайық. Екіншісі T-ні тегіс функциямен өрнектеуге болмайтын нүктелерден тұрады. H үшін supp $H = [0, \infty)$, ал сингуляр тасымалдаушысы $\{0\}$. Шынында, нөлдің екі жағында H тұрақты.

Өзіндік жұмыс

$T = 1 + \delta_0$ үшін supp T табыңыз. Жауап: $\mathbb{R}$. Нөлден алыс кез келген аралықта T тұрақты 1 функциясымен бірдей, ал тасымалдаушы тұйық.

Ашық жиындағы теңдікке мысал

Ашық жиындағы теңдікке мысал. $T = \delta_0 + 1$ және $S = 1$ функционалдары $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ашық жиынында тең. Себебі осы жиында тасымалданған φ нөлдің белгілі бір маңында нөл, демек $\varphi(0) = 0$. Ал нөлді қамтитын ашық аралықта $\varphi(0) = 1$ етіп таңдауға болады. Сондықтан $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ — теңдік орындалатын ең үлкен ашық жиын. Бұл есепте әр функционалдың тасымалдаушысын жеке есептеу қажет емес: теңдікке олардың айырмасы жауап береді. Оқуға арналған бөлімдер · Фалалеев, §4, 25–26-б.

Жергілікті теңдік және шекара нүктелері

Жалпыланған функцияны ашық U жиынына шектеу үшін $D(U)$-дағы сынақ функцияларын U сыртында нөлмен жалғастырамыз. Тасымалдаушы U-дың ішінде компакт болғандықтан, бұл жалғастыру тегістікті сақтайды. Содан кейін бастапқы функционалды сол жалғастыруға қолданамыз. Мысалы, H және 1 функциялары $(0, \infty)$-де тең. Теріс жарты осьте H нөлге тең. Нөлді қамтитын кез келген аралықта оң жақта жатқан сынақ функциясын таңдауға болады, сондықтан нөл supp H-қа кіреді.

Жергілікті теңдік және шекара нүктелері

Тұйық шекараның маңызын $f(x) = 1_{a,b}(x)$ мысалынан көрейік. Функция a мен b нүктелерінде нөл деп анықталса да, сол нүктелердің әр маңында интегралы оң болатын сынақ функциясын (a,b) ішінен табамыз. Сондықтан тасымалдаушы (a,b) емес, оның тұйықталуы [a,b].

$$T|_U = 0 \Leftrightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0 \qquad \big(\forall \varphi \in \mathcal{D}(U)\big).$$

Жергілікті теңдік және шекара нүктелері

Жергілікті теңдіктің бірігуін дәлелдейік. U ашық жиындардың бірігуі болсын және T әрбір бөлікте нөл болсын. $\varphi \in D(U)$ алсақ, оның компактысын сол ашық жиындардың ақырлы саны жабады. Бірлік жіктеуімен $\varphi = \Sigma\varphi_i$ деп жіктейміз, әр φ_i өз бөлігінің ішінде тасымалданады. Сызықтылықтан $\langle T, \varphi\rangle = \Sigma\langle T, \varphi_i\rangle = 0$. Сондықтан T бүкіл U- де нөл.

Жергілікті теңдік және шекара нүктелері

Сингуляр тасымалдаушыны табу үшін әр нүктенің маңында T-ні тегіс функциямен алмастыру мүмкіндігін қараймыз. Мысалы, x^2 функциясының тасымалдаушысы $\mathbb{R}$, ал сингуляр тасымалдаушысы бос.

Туынды тасымалдаушыны ұлғайтпайды

Туынды тасымалдаушыны ұлғайтпайды. Егер T ашық U-де нөл болса, әрбір $\varphi \in D(U)$ үшін оның φ' туындысы да $D(U)$-ға жатады. Сондықтан $\langle DT, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle = 0$. Осыдан $\operatorname{supp} DT \subset \operatorname{supp} T$. Кері енгізу міндетті емес. Мысалы, H-тің тасымалдаушысы $[0, \infty)$, ал $DH = \delta_0$ тек нөлде тасымалданады. Бұл айырмашылық оң жарты осьте H-тің тұрақты болуынан шығады.

Шығарылған есеп

$T = \delta_0 + H(x-1)$ функционалының тасымалдаушысын табайық. $\mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup [1,\infty))$ ішінде екі бөлік те нөл. Нөл маңында радиусы 1- ден кіші аралықта $\varphi(0) = 1$ болатындай таңдаймыз. $H(x-1)$ үлесі нөл, сондықтан $\langle T, \varphi \rangle = 1$. $x \geq 1$ нүктесінің кез келген ашық маңында $(1,\infty)$ ішінде интегралы оң сынақ функциясын таңдауға болады. Онда дельта үлесі нөл, ал H мүшесі оң.

$$\operatorname{supp} T = \{0\} \cup [1,\infty), \qquad \operatorname{sing\,supp} T = \{0,1\}.$$

Нөлде дельта сингуляр

Нөлде дельта сингуляр. 1 нүктесінде тегіс өкіл болса, ол $(1-r,1)$ аралығында нөлге және $(1,1+r)$ аралығында бірге тең болар еді. Бұдан біржақты шектер сәйкес келмейтіні көрінеді. Қалған нүктелердің маңында T тұрақты функциямен беріледі.

Өзіндік жұмыс

1) $\delta_0 + \delta_1$ және $\delta_0 - \delta_1$ функционалдары қай ең үлкен ашық жиында тең?

2) $f(x) = |x - 2|$ функциясының тасымалдаушысы мен сингуляр тасымалдаушысын табыңыз.

3) $T = \delta_0$ және $S = -\delta_0$ үшін $\operatorname{supp}(T + S)$ пен $\operatorname{supp} T \cup \operatorname{supp} S$ жиындарын салыстырыңыз.

Жауаптарды тексеру

1) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, өйткені айырмасы $2\delta_1$. 2) $\mathbb{R}$ және {2}. 3) Қосындының тасымалдаушысы бос, ал бірігу {0}. Демек тасымалдаушыларды біріктіру қосынды үшін тек жоғарғы шек береді.

Қосымша есеп

$T = H(x) - H(x-2)$ болсын. $0 < x < 2$ кезінде $T = 1$, екі шеттен тыс жерде $T = 0$. Сондықтан supp $T = [0,2]$. Әр шетте біржақты мәндер әртүрлі болғандықтан, сингуляр тасымалдаушы {0,2}. Туындысы $\delta_0 - \delta_2$. Осы мысалда туындының тасымалдаушысы бастапқы функцияның сингуляр тасымалдаушысымен дәл келеді. Сұрақ. Бұл сәйкестік кез келген тегіс, тұрақты емес f функциясына орындала ма? Жауап. Жоқ, мысалы $f = x$, ал $Df = 1$.

Өзіндік тапсырмалар

01 $T=\delta_{-1}+\mathbb{1}_{(0,2)}$ үшін supp T және sing supp T табыңыз.

02 $\operatorname{supp}(DT) \subsetneq \operatorname{supp} T$ болатын нөлден өзгеше T мысалын құрыңыз.

Қорытынды

Үлестірімнің тасымалдаушысы оның нөл болатын ең үлкен ашық жиынының толықтауышы. Сингуляр тасымалдаушы оның тегіс өкілі жоқ нүктелерін көрсетеді.

Бақылау сұрақтары

01 Ашық жиында екі үлестірімнің теңдігін қалай тексереміз?

02 Туынды тасымалдаушыны неліктен ұлғайтпайды?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §1, 18–20-б.; §2, 33–35-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.