13-дәріс

Дәрежелік ерекшелікті регуляризациялау

Тейлор көпмүшесі, мероморфты жалғастыру және қалдықтар

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Дифференциалдық теңдеулер мен түрлендірулер

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Тейлор көпмүшесін азайту арқылы дәрежелік ерекшелікті регуляризациялау және мероморфты жалғастырудың қалдығын есептеу.

Дәріс жоспары

1. Анықтама мен негізгі формула
2. Теорема және дәлелдеу
3. Мысалдар және өзіндік жұмыс

Бастапқы анықтама

x_+^λ функциясы $x > 0$ үшін x^λ, ал $x < 0$ үшін нөл. Re $\lambda > -1$ болғанда ол жергілікті интегралданады және сынақ функциясына интеграл арқылы әсер етеді.

Интегралды бөлу

Интегралды $(0,1)$ және $[1,\infty)$ аралықтарына бөлеміз. Екінші интегралдың аралығы нөлден алшақ және сынақ функциясының тасымалдаушысы компакт. Сондықтан екінші интеграл λ-ның бүтін функциясы.

Тейлор қалдығын бағалау

$R_n(x) = \varphi(x) - \Sigma_{k=0}^{n-1}\varphi^{(k)}(0)x^k/k!$ деп аламыз. Тейлор формуласынан $|R_n(x)| \leq x^n$ $\sup_[0,1]|\varphi^{(n)}|/n!$ шығады.

Дәрежелік ерекшелікті регуляризациялау

ТЕОРЕМА

x_+^λ үлестірімі $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$ аймағынан $\mathbb{C}$-ге мероморфты жалғасады. $\lambda = -1, -2, \ldots$ нүктелеріндегі қалдықтары $(-1)^k \delta_0^{(k)}/k!$, мұнда $\lambda = -k-1$.

$$\mathrm{Res}_{\lambda=-k-1}\, x_+^\lambda = \frac{(-1)^k}{k!}\, \delta_0^{(k)}$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Дәрежелік ерекшелікті регуляризациялау

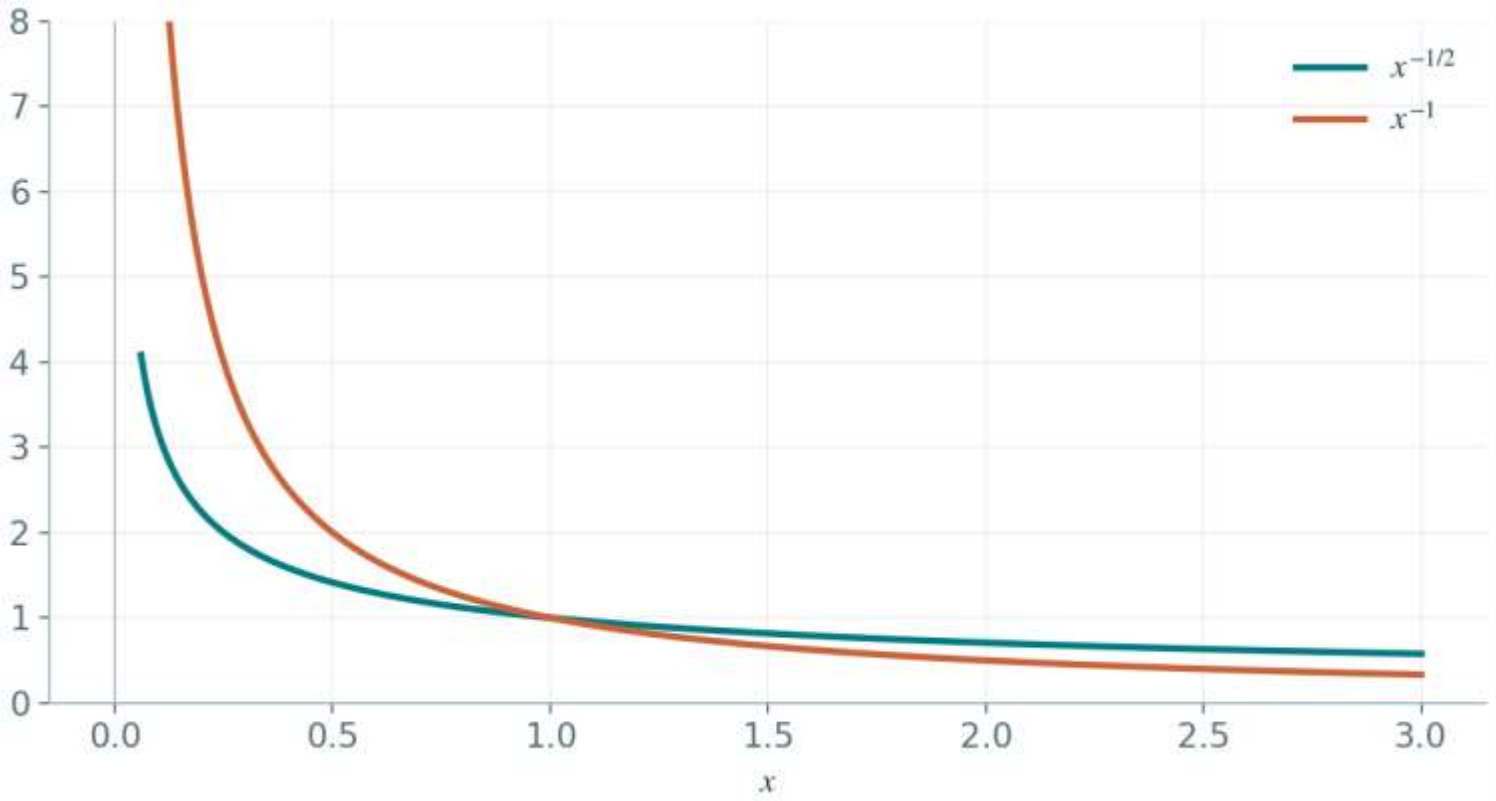
$\langle x_+^\lambda, \varphi\rangle = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx$. [0,1] бөлігінде φ-дің $n-1$ дәрежелі Тейлор көпмүшесін алып тастаймыз. Қалдық $O(x^n)$, сондықтан оның интегралы Re $\lambda > -n-1$ жарты жазықтығында голоморфты.

Дәлелдеу · 2-қадам

Дәрежелік ерекшелікті регуляризациялау

Алып тасталған мүшелердің интегралы $\Sigma_{k=0}^{n-1}\varphi^{(k)}(0)/[k!\,(\lambda+k+1)]$. $[1,\infty)$ интегралы бүтін. Жарты жазықтықтарда жалғастырулар бастапқы аймақта тең, сондықтан қабысады. Полюс қалдығы $\varphi^{(k)}(0)/k! = \langle(-1)^k\delta_0^{(k)}/k!, \varphi\rangle$.

Дәрежелік ерекшеліктің екі түрі



Графикті оқу

$\lambda = -1/2$ кезінде x_+^λ нөлде шексіз өседі, бірақ интегралданады. $\lambda = -1$ кезінде кәдімгі интеграл логарифмдік түрде алшақтайды.

Параметр бойынша голоморфтылық

Кез келген ықшам параметр жиынында Re $\lambda \geq a > -n - 1$. λ бойынша туындылатқанда |ln x| дәрежелері пайда болады. $x^{a+n}|\ln x|^m$ функциясы (0,1)-де интегралданады, сондықтан туындыны интеграл ішіне кіргізуге болады.

Жалғастыру формуласы

Жалғастыру үш бөліктен тұрады. Бірінші бөлік $\int_0^1 x_n^{\lambda R}(x)dx$, екіншісі $\Sigma_k\ \varphi^{(k)}(0)/[k!\,(\lambda+k+1)]$, үшіншісі $\int_1 \infty x^{\lambda\varphi}(x)dx$. Әр n жарты жазықтықты солға бір бірлікке кеңейтеді.

Функционалдың үзіліссіздігі

Берілген λ полюс болмаса, бірінші бөлік $\varphi^{(n)}$ нормасымен, екіншісі нөлдегі ақырлы санды туындылармен бағаланады. Үшінші бөлік ортақ компакттағы φ нормасымен бағаланады. Демек әр λ үшін үлестірім алынады.

$\lambda=-1$ маңындағы жіктеу

$n = 1$ кезінде жалғыз полюстік мүше $\varphi(0)/(\lambda + 1)$. Сондықтан $\lambda = -1$ нүктесіндегі қалдық δ_0.

$\lambda=-2$ маңындағы жіктеу

$n = 2$ алсақ, $\lambda = -2$ нүктесіндегі қалдық жұптастыруда $\varphi'(0)$-ге тең. ${\delta_0}'$ сынақ функциясына $-\varphi'(0)$ беретіндіктен қалдық $-{\delta_0}'$ болады.

Ақырлы бөлік

$\lambda = -1$ маңында полюстік мүшені алып тастағаннан кейін $\lambda = -1$ мәнін қоямыз. Ақырлы бөлік сынақ функциясына $\int_0^1 [\varphi(x) - \varphi(0)]dx/x + \int_1 \infty \varphi(x)dx/x$ арқылы әсер етеді.

Өзіндік жұмыс

$\lambda = -3$ нүктесіндегі қалдықты табыңыз. Содан кейін φ нөл маңында нөл болса, жалғастыру формуласының кәдімгі интегралмен неге сәйкес келетінін дәлелдеңіз.

Жауапты тексеру

$\lambda = -3$ кезінде $k = 2$, қалдық $\delta_0''/2$. Егер φ нөл маңында нөл болса, φ-дің нөлдегі барлық туындылары нөл. Полюстік қосылғыштар түгел жойылады.

Өзіндік тапсырмалар

01 $\lambda = -4$ нүктесіндегі қалдықты есептеңіз.

02 $\mathrm{Re}\,\lambda > -3$ жарты жазықтығына жалғастыру формуласын $n = 2$ арқылы жазыңыз.

Қорытынды

Тейлор көпмүшесін азайту x_+^λ үлестірімін мероморфты жалғастырады. Полюстердің қалдықтары нөлдегі δ туындыларымен өрнектеледі.

Бақылау сұрақтары

01 Тейлор қалдығының $O(x^n)$ бағасы интегралдың жинақталу аймағын қалай өзгертеді?

02 Неліктен $\lambda = -2$ нүктесіндегі қалдық $-\delta_0{}'$ болады?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §3, 64–85-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.