12-дәріс

Коши есебі және бастапқы шарттар

Бастапқы шарттарды дельта арқылы енгізу

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Дифференциалдық теңдеулер мен түрлендірулер

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Бастапқы мәнді дельта мүшесіне айналдырып, Коши есебін үйірткі арқылы шешу.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Екінші ретті Коши есебіндегі бастапқы мүшелер
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

$u' - au = f$ теңдеуі $t > 0$-де беріліп, $u(0+) = u_0$ болсын. u-ды $t < 0$-де нөлмен жалғастырамыз және $U = Hu$ деп белгілейміз. Бөліктеп интегралдау $U' = Hu' + u_0\delta_0$ формуласын береді. Дельта коэффициенті нөлдегі секірісті тіркейді. Осылайша бастапқы мән бүкіл осьтегі теңдеудің оң жағына өтеді.

$$(D - a)U = Hf + u_0\delta_0, \qquad E(t) = H(t)e^{at}.$$

Шығарылған мысал

Теңдеудің оң жағы мен E-нің үйірткісін алсақ, $t > 0$ үшін $u(t) = e^{at}u_0 + \int_0^t e^{\wedge}[a(t - s)]f(s)ds$ шығады. $a = -1$, $f = 1$, $u_0 = 2$ десек, $u(t) = 2e^{-t} + (1 - e^{-t}) = 1 + e^{-t}$. Тексеру: $u' + u = 1$ және $u(0+) = 2$. Интегралдағы шектер себептілікке сай келеді, өйткені $E(t - s)$ тек $s \le t$ кезінде әсер етеді.

Негізгі ұғымдар

Екінші ретті есепте екі бастапқы мән екі түрлі сингуляр мүше туғызады. Мысалы, $u'' = f$, $u(0+) = u_0$, $u'(0+) = v_0$ үшін $U'' = Hf + v_0\delta_0 + u_0\delta_0{}'$. Оң жақтағы өрнек пен $E = tH$ функциясының үйірткісін алғанда $t > 0$-де $u(t) = u_0 + v_0 t + \int_0^t (t-s)f(s)ds$ аламыз.

Коши есебін үйірткімен шешу

ТЕОРЕМА

f үздіксіз, $u'' + bu' + cu = f$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$ болсын. $E = He$ алдыңғы теоремадағы фундаменталдық шешім болса, $U = E * [Hf + (v_0 + bu_0)\delta_0 + u_0\delta_0{}']$ шешім береді.

$$u(t) = \int_0^t e\,(t-s)f(s)\,ds + (v_0 + bu_0)e(t) + u_0e'(t)$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Коши есебін үйірткімен шешу

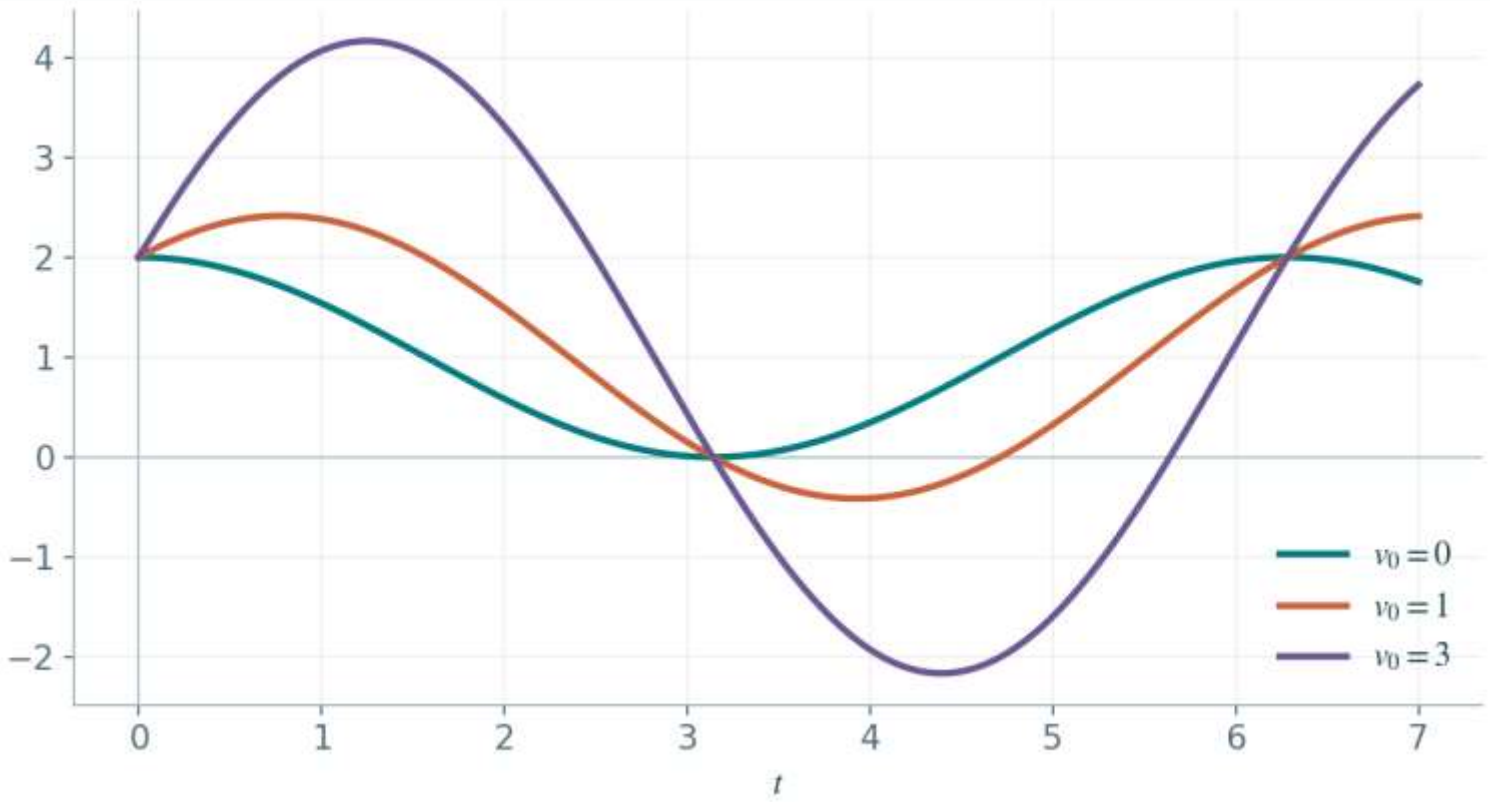
Екі көбейткіш те $[0,\infty)$-де тасымалданады, сондықтан қосынды бейнелеуінің компакт шарты орындалады. L-ді үйірткіге қолдансақ, $LE = \delta_0$ бойынша оң жақтағы жалпыланған теңдеуді аламыз.

Дәлелдеу · 2-қадам

Коши есебін үйірткімен шешу

$t > 0$-де $u(t) = \int_0^t e(t-s)f(s)ds + (v_0 + bu_0)e(t) + u_0 e'(t)$. $e(0) = 0$, $e'(0) = 1$, $e''(0) = -b$ шарттарынан $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$. Теңдеудің өзі $t > 0$-де жалпыланған теңдеуден шығады. Бірмәнділік біртекті ОДЕ үшін нөлдік бастапқы деректерден шығады.

Бастапқы жылдамдықтың әсері



Графикті оқу

$u'' + u = 1$ есебінде бастапқы жылдамдық әртүрлі болғанда графиктердің нөлдегі көлбеуі өзгереді.

Түсіндірме

Шешімнің бірмәнділігін классикалық түрде де тексереміз. Бірдей бастапқы мәні бар екі шешімнің айырмасы $z' - az = 0$ және $z(0+) = 0$ шарттарын қанағаттандырады. $(e^{-at}z(t))' = 0$ болғандықтан, айырма барлық $t > 0$ үшін нөл.

Өзіндік жұмыс

$u' + 2u = 0, u(0+) = 3$ есебін осы әдіспен шешіңіз. Жауап: $U = 3H(t)e^{-2t}$.

Бастапқы мәннің таңбасы

Бастапқы мәннің таңбасы. $U = Hu$ үшін $\langle DU, \varphi \rangle = -\int_0^{\wedge}\infty u\varphi'$. Бөліктеп интегралдағанда $-\ [u\varphi]_0^{\wedge}\infty$ мүшесі шығады. Жоғарғы ұшы нөл, себебі φ компактта тасымалданады. Төменгі ұшы $u(0+)\varphi(0)$, яғни $+u_0\delta_0$. Егер u-дың сол жақ жалғастыруы нөлдің орнына басқа функция болса, коэффициент $u(0+) - u(0-)$ болады. Осы ереже бастапқы мәннің қайдан шыққанын тікелей көрсетеді.

Екінші ретті Коши есебіндегі бастапқы мүшелер

$u'' + bu' + cu = f$, $u(0+) = u_0$, $u'(0+) = v_0$ болсын. $U = Hu$ жалғастыруы үшін $DU = Hu' + u_0\delta_0$. Осы формуланы тағы қолдансақ, $D^2U = Hu'' + v_0\delta_0 + u_0\delta_0'$. bDU және cU мүшелерін қосқанда бастапқы деректердің теңдеудің оң жағына қалай өтетіні көрінеді.

$$LU = Hf + (v_0 + bu_0)\delta_0 + u_0\delta_0'.$$

Екінші ретті Коши есебіндегі бастапқы мүшелер

Теңдеудің оң жағы мен алдыңғы дәрістегі E фундаменталдық шешімінің үйірткісін аламыз. $E * \delta_0 = E$, $E * \delta_0{}' = DE$. Сондықтан $U = E * (Hf) + (v_0 + bu_0)E + u_0 DE$. $t > 0$-де $E = e$ және $DE = e'$. Осыдан

$$u(t) = \int_0^t e\,(t-s) f(s)\,ds + (v_0 + bu_0)e(t) + u_0 e'(t).$$

Бастапқы шартты тексерейік

Бастапқы шартты тексерейік. $e(0) = 0$ және $e'(0) = 1$ болғандықтан $u(0+) = u_0$. Біртекті теңдеуді $t = 0$-де қолдансақ $e''(0) = -b$. Сондықтан бастапқы туынды $(v_0 + bu_0) - bu_0 = v_0$. Интегралдық мүшенің бастапқы мәні мен туындысы нөл, себебі $e(0) = 0$ және f нөл маңында үздіксіз деп аламыз.

Екінші ретті Коши есебіндегі бастапқы мүшелер

Формуладағы bu_0 мүшесін қалдырсақ, бастапқы туынды $v_0 - bu_0$ болып кетер еді. Демек төменгі ретті bD мүшесі де бастапқы секірістің үлесін береді.

Екінші ретті Коши есебіндегі бастапқы мүшелер

Бірмәнділіктің жалпыланған дәлелі. U_1 және U_2 бір теңдеуді шешіп, екеуі де $[0,\infty)$-та тасымалдансын. $Z = U_1 - U_2$ үшін $LZ = 0$. E — сол жарты осьте тасымалданған фундаменталдық шешім. Үйірткі анықталғандықтан, $Z = \delta_0 * Z = (LE) * Z = E * (LZ) = 0$. Демек бастапқы дерек теңдеудің оң жағына дұрыс енгізілсе, оң жарты осьте жалғастырылған шешім бірмәнді болады. Бұл есептеу классикалық бірмәнділік дәлелін функционалдық түрде қайталайды.

Шығарылған есеп

$u'' + u = 1$, $u(0+) = 2$, $u'(0+) = 3$ болсын. Мұнда $b = 0$, $e(t) = \sin t$. Жалғастырылған теңдеу $(D^2 + 1)U = H + 3\delta_0 + 2\delta_0{}'$. Үйірткіден

$$u(t) = \int_0^t \sin(t - s)\, ds + 3\sin t + 2\cos t = 1 + \cos t + 3\sin t.$$

Тексеру

$u'' = -\cos t - 3\sin t$, сондықтан $u'' + u = 1$. $t = 0$-де $u = 2$ және $u' = 3$. Шешімнің тұрақты 1 бөлігі көзден, ал синус пен косинус бөліктері бастапқы мәндер мен көздің өтпелі әсерінен шығады.

Екінші есеп

$u' + u = \delta_a$, $a > 0$, $u(0+) = 0$ болсын. Оң жарты осьтегі $E(t) = H(t)e^{-t}$ шешімі мен δ_a-ның үйірткісін алғанда $U = H(t-a)e\text{^}(-(t-a))$ шығады. a-ға дейін шешім нөл, a-да секірісі 1. Одан кейін $u' + u = 0$. Секіріс туындыдағы δ_a мүшесін туғызады.

Өзіндік жұмыс

1) $u'' = 2,\ u(0+) = 1,\ u'(0+) = -1$ есебін үйірткі арқылы шешіңіз.

2) $u' - u = 0,\ u(0+) = 4$ үшін жалғастырылған теңдеуді жазыңыз.

3) $u'' + 2u' + u = 0,\ u(0+) = 1,\ u'(0+) = 0$ есебін алдыңғы беттегі формуламен шешіңіз.

Жауаптарды тексеру

1) $u = 1 - t + t^2$. 2) $(D-1)U = 4\delta_0$. 3) $e = t\ e^{-t}$, сондықтан $u = 2t\ e^{-t} + (1-t)e^{-t} = (1+t)e^{-t}$.

Қосымша есеп

$u'' = \delta_1$, $u(0+) = 0$, $u'(0+) = 0$ есебін қарайық. $E = tH(t)$, сондықтан $U = E * \delta_1 = (t-1)H(t-1)$. $t < 1$ кезінде U нөл, ал $t > 1$ кезінде көлбеуі 1 болатын түзу. U өзі 1 нүктесінде үздіксіз, бірақ бірінші туындысы 0-ден 1-ге секіреді. Сондықтан $D^2U = \delta_1$. Осылайша импульс шешімнің мәнін емес, бірінші туындысын өзгертеді.

Өзіндік тапсырмалар

01 $u'' + 3u' + 2u = 0, u(0) = 1, u'(0) = 0$ үшін $U = Hu$ теңдеуінің оң жағын жазыңыз.

02 $u'' + u = \delta_1, u(0) = u'(0) = 0$ есебін фундаменталдық шешім арқылы шығарыңыз.

Қорытынды

Нөлге жалғастырылған Коши есебінде бастапқы мәндер δ_0 және $\delta_0{}'$ коэффициенттеріне кіреді. Үйірткі шешімнің бастапқы шарттарын қалпына келтіреді.

Бақылау сұрақтары

01 $v_0 + bu_0$ коэффициентіндегі bu_0 қай мүшеден шығады?

02 Үйірткі формуласынан $u'(0) = v_0$ теңдігін қалай тексереміз?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §5, 142–147-б.; §6, 170–179-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.