Жалпыланған функциялар

2-дәріс

Шварц кеңістігі $\mathcal{S}$

Тез кемитін функциялар, жартылай нормалар және тығыздық

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

1-модуль. Сынақ кеңістіктері мен функционалдар

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Тез кемитін функцияны тану және D мен S кеңістіктерінің жинақталу шарттарын ажырату.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Жартылай нормалар және тығыздық
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

Шварц кеңістігіне барлық реттегі туындылары бар және сол туындылары кез келген көпмүшелік дәрежемен көбейткенде де шектелген функциялар кіреді. Бұл шарт функцияның өзін де, туындыларын да бақылайды. Кеңістіктің негізгі сипаттамалары — төмендегі жартылай нормалар.

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_x \left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \right| < \infty \qquad (\forall \alpha, \beta).$$

Негізгі ұғымдар

$\varphi_j \to \varphi$ шарты әрбір $p_{a,\beta}\,(\varphi_j - \varphi) \to 0$ дегенді білдіреді. $D \subset S$, себебі компакт жиында әр туынды да, x^α көбейткіші де шектелген. Кері енгізу орындалмайды. Тез кемитін функцияларды кесу арқылы D-ның S-де тығыз екенін көруге болады. $\chi \in D$ функциясы бірлік шарда 1 болсын. $\chi(x/R)\varphi(x)$ тізбегі φ-ге S-де жинақталады. Айырманың туындыларын Лейбниц ережесімен жіктегенде мүшелер $|x| \geq R$ аймағында қалады. Сол аймақта φ мен туындыларының тез кемуі әр жартылай норманы нөлге жібереді.

Шығарылған мысал

$\varphi(x) = e^{-x^2}$ үшін әр туынды $P_k(x)e^{-x^2}$ түрінде болады. Индукция қадамы $P_{k+1} = P_k{}' - 2xP_k$ формуласынан шығады. Көпмүшелік пен Гаусс функциясының көбейтіндісі шектелген. Осыдан $\varphi \in S$, ал оның тасымалдаушысы бүкіл $\mathbb{R}$.

$\mathcal{D}$ кеңістігінің $\mathcal{S}$-тегі тығыздығы

ТЕОРЕМА

Кез келген $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ функциясын $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-дегі функциялармен барлық Шварц жартылай нормалары бойынша жуықтауға болады.

$$p_{N,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N \left|\partial^\beta \varphi(x)\right|$$

Дәлелдеу · 1-қадам

$\mathcal{D}$ кеңістігінің $\mathcal{S}$-тегі тығыздығы

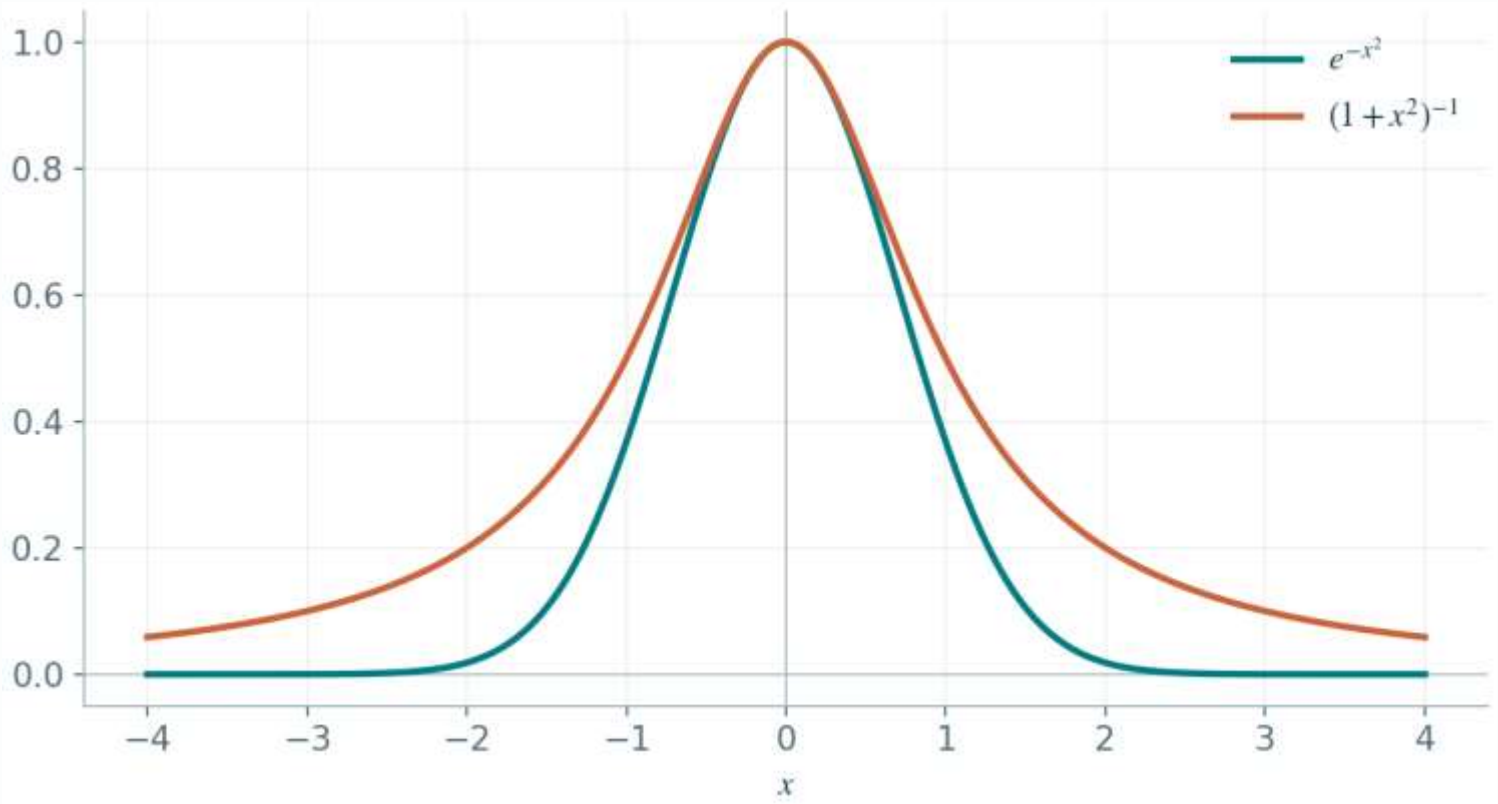
$\chi \in \mathcal{D}$, $\chi = 1$ бірлік шарда болсын. $\varphi_R(x) = \chi(x/R)\varphi(x)$ деп аламыз. Лейбниц формуласында $\partial^\beta(\varphi - \varphi_R)$ мүшелерінің барлығы $|x| \geq R$ аймағында тасымалданады.

Дәлелдеу · 2-қадам

$\mathcal{D}$ кеңістігінің $\mathcal{S}$-тегі тығыздығы

β бойынша жіктеудегі χ туындылары R^{-k} көбейткішін береді. $|x| \geq R$ болғанда $(1+|x|)^N|\partial^\gamma\varphi| \leq (1+R)^{-1}$ sup $(1+|x|)^{N+1}|\partial^\gamma\varphi|$. $R \geq 1$ үшін әр мүше $O(R^{-1})$, сондықтан барлық жартылай нормалар нөлге ұмтылады.

Тез кему мен дәрежелік кему



Графикті оқу

Гаусс функциясы барлық көпмүшелік салмақтардан жылдам кемиді. $(1 + x^2)^{-1}$ үшін x^3 салмағы шектелмейді.

Түсіндірме

Кему жылдамдығын әрбір $N \geq 0$ үшін $(1+|x|)^N \cdot |D^\beta \varphi(x)|$ арқылы да бақылауға болады. Бұл сипаттама S функцияларының және туындыларының интегралданатынын көрсетеді. Мысалы, $\mathbb{R}^n$ кеңістігінде $N > n$ деп алсақ, $(1+|x|)^{-N}$ интегралданады.

Өзіндік жұмыс

$(1 + x^2)^{-1}$ функциясын тексеріңіз. Жауап: $p_{3,0} = \infty$, сондықтан ол S-ке кірмейді.

Шварц кеңістігінің тағы бір сипаттамасы

Шварц кеңістігінің тағы бір сипаттамасы. Бірөлшемді жағдайда әрбір n,k үшін $|x|^n|\varphi^{(k)}(x)|$ шектелген болса, $(1+|x|)^n|\varphi^{(k)}(x)|$ те шектелген. Өйткені $(1+|x|)^n$ биномиалдық формуламен |x|-тің 0-ден n-ге дейінгі дәрежелерінің қосындысына жіктеледі. Кері бағыт $|x| \le 1+|x|$ теңсіздігінен шығады. Бірінші сипаттамамен алгебралық амалдар, екіншісімен шексіздіктегі кему жылдамдығы ыңғайлы бағаланады. Оқуға арналған бөлімдер · Фалалеев, §2, 9–13-б.; Бельхеева, §3.4, 70–72-б.

Жартылай нормалар және тығыздық

Шварц кеңістігінде $p_{n,k}(\varphi) = \sup_x |x^n \varphi^{(k)}(x)|$ деп жазайық. Әрбір n,k үшін бұл сан ақырлы болса, φ және оның туындылары кез келген көпмүшелік салмақпен басқарылатынын көреміз. Мысалы, $n = 2$ және $k = 0$ шартынан $|\varphi(x)| \leq p_{2,0}(\varphi)/x^2$, $x \neq 0$ шығады. $|x| \leq 1$ аймағында $p_{0,0}$ жеткілікті. Екі аймақты біріктірсек, $\int \mathbb{R}|\varphi| \leq 2p_{0,0} + 2p_{2,0}$ болады.

Жартылай нормалар және тығыздық

Тығыздықтың дәлелін ашайық. $\chi \in D(\mathbb{R})$ функциясы $[-1,1]$-де 1 және $[-2,2]$ сыртында нөл болсын. $\chi_R(x) = \chi(x/R)$ деп, $\varphi_R = \chi_R\varphi$ аламыз. $\varphi_R \in D$. Айырманың k-ретті туындысын Лейбниц ережесімен жіктейміз.

$$(\varphi - \varphi_R)^{(k)} = (1 - \chi_R)\varphi^{(k)} - \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \chi_R^{(j)} \varphi^{(k-j)}.$$

Жартылай нормалар және тығыздық

Бірінші қосылғыш $|x| \geq R$ аймағында ғана нөлден өзгеше болады. Осы аймақта $|x^n \varphi^{(k)}| \leq p_{n+1,k}/R$. Қалған қосылғыштар $R \leq |x| \leq 2R$ аймағында тасымалданады. $\chi_R^{(j)}$ функциясы $R^{-j}\|\chi^{(j)}\|\infty$ арқылы бағаланады. Демек барлық $p_{n,k}\ (\varphi - \varphi_R)$ нөлге ұмтылады. Осыдан D-ның S-тегі тығыздығы шығады.

Бұл нәтиженің қолданылуы бар

Бұл нәтиженің қолданылуы бар. S'-тегі екі үзіліссіз функционал барлық компакт тасымалдаушылы сынақ функцияларында тең болса, φ_R арқылы шекке көшкенде олар барлық $\varphi \in S$ үшін тең болады.

Ауыстырудың әсері

Ауыстырудың әсері. $\varphi \in S$ және a бекітілген сан болса, $\psi(x) = \varphi(x - a)$ да S-ке жатады. $y = x - a$ десек, $x^n = (y + a)^n$. Бұл n дәрежеге дейінгі көпмүше. Сондықтан ψ-дің әр жартылай нормасын φ-дің ақырлы санды жартылай нормасымен бағалаймыз. Сол сияқты $\psi(x) = \varphi(bx)$, $b \neq 0$ болса, $p_{n,k}(\psi) = |b|^{k-n} p_{n,k}(\varphi)$. Бұл теңдік $y = bx$ ауыстыруынан және тізбекті туынды ережесінен шығады.

Шығарылған есеп

$\varphi_j(x) = e^{-x^2}/j$ тізбегі S-те нөлге жинақтала ма? Туындысы $P_k(x)e^{-x^2}/j$. Сондықтан $p_{n,k}(\varphi_j) = \sup_x |x^n P_k(x)e^{-x^2}|/j \to 0$. Бұл тізбектің мүшелерінің тасымалдаушысы бүкіл ось болса да, S-тегі жинақталу анықтамасы орындалады.

Екінші есеп

$\eta \in D(\mathbb{R})$ және $\eta(0) \neq 0$ болсын. $\varphi_j(x) = e^{-j}\eta(x-j)$ тізбегін қарайық. Егер supp $\eta \subset [-r, r]$ болса, φ_j нөлден өзгеше болатын жерлерде $|x| \leq j + r$. Сондықтан

$$p_{n,k}(\varphi_j) \leq e^{-j}(j+r)^n \parallel \eta^{(k)} \parallel_\infty \to 0.$$

Практикум және өзіндік жұмыс

Салыстыру үшін e^{-j} орнына $\frac{1}{j}$ қойсақ, $x = j$ нүктесінде $|x^2\varphi_j(x)| = j|\eta(0)|$. Демек $p_{2,0}$ бойынша нөлге жинақталу жоғалады. Кіші амплитуда кеңістіктегі ығысуды қаншалықты өтейтінін салмақты бағалау анықтайды.

Өзіндік жұмыс

1) xe^{-x^2} функциясының S-ке жататынын дәлелдеңіз. Оның туындыларының құрылымын пайдаланыңыз.

2) $e^{-|x|}$ функциясының S-ке жататынын тексеріңіз. Нөлдегі біржақты туындыларын есептеңіз.

3) $\varphi \in S$ болса, $x\varphi$ және φ' функцияларының S-ке жататынын $p_{n,k}$ арқылы көрсетіңіз.

Жауаптарды тексеру

1) Әр туынды көпмүше мен Гаусс функциясының көбейтіндісі. 2) Нөлдегі біржақты туындылар $+1$ және -1, сондықтан функция тегіс емес. 3) φ' үшін $p_{n,k}(\varphi') = p_{n,k+1}(\varphi)$. $x\varphi$ үшін Лейбниц формуласында екі мүше қалады.

Қосымша есеп

$\varphi \in S$ болса, $\int \mathbb{R}x^2\varphi(x)dx$ интегралы абсолют жинақталады. $|x| \leq 1$ кезінде $|x^2\varphi(x)| \leq p_{0,0}$. $|x| > 1$ кезінде $|x^2\varphi(x)| \leq p_{4,0}/|x|^2$. Екі бөлікті интегралдасақ, $|\int x^2\varphi| \leq 2p_{0,0} + 2p_{4,0}$. Сондықтан бұл интеграл S- тегі үзіліссіз сызықтық функционал анықтайды. Тапсырма. x^2 орнына x^m қойып, $p_{m+2,0}$ көмегімен сәйкес баға шығарыңыз.

Өзіндік тапсырмалар

01 $x^3 e^{-x2}$ функциясының $\mathcal{S}(\mathbb{R})$-ге жататынын дәлелдеңіз.

02 $f(x) = (1 + x^2)^{-2}$ функциясын $\mathcal{S}$-ке кіргізбейтін бір жартылай норманы табыңыз.

Қорытынды

$\mathcal{S}$ кеңістігінің жартылай нормалары туындылардың шексіздіктегі кемуін бақылайды. Тегіс қиғыштар арқылы $\mathcal{D}$-ның $\mathcal{S}$-тегі тығыздығы дәлелденеді.

Бақылау сұрақтары

01 $\mathcal{D}$ мен $\mathcal{S}$ кеңістіктеріндегі жинақталу шарттары қалай ерекшеленеді?

02 Тығыздық дәлелінде $\chi(x/R)$ қиғышы қандай қызмет атқарады?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §1, 31–32-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.