Жалпыланған функциялар

11-дәріс

Фундаменталдық шешім

Импульстік жауап және тұрақты коэффициентті операторлар

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Дифференциалдық теңдеулер мен түрлендірулер

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Импульстік көзге сәйкес фундаменталдық шешімді тауып, одан дербес шешім құру.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Тұрақты коэффициентті операторға импульстік жауап
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

Тұрақты коэффициентті $L = P(D)$ дифференциалдық операторы үшін E фундаменталдық шешім деп аталады, егер $LE = \delta_0$ болса. Бұл анықтама нүктелік бірлік көздің әсерін сипаттайды. Үйірткі анықталған жағдайда $E * f$ функциясы $Lu = f$ теңдеуін шешеді. Мысалы, f компакт тасымалдаушылы болса, үйірткінің бар болу шарты орындалады.

$$L(E * f) = (LE) * f = \delta_0 * f = f.$$

Шығарылған мысал

$L = D^2$ үшін $E(x) = xH(x)$. Бірінші туынды H, себебі $D(xH) = H + x\delta_0 = H$. Екінші туынды δ_0. Басқа фундаменталдық шешім $E_1 = |x|/2$, себебі $D^2|x| = 2\delta_0$. Айырмасы $E - E_1 = x/2$ және оның екінші туындысы нөл. Осылайша фундаменталдық шешімге біртекті теңдеудің шешімін қосуға болады.

Негізгі ұғымдар

Бірінші ретті $L = D - a$ операторы үшін $E = H(x)e^{ax}$. Туындының көбейтінді ережесі бойынша $D(He^{ax}) = aHe^{ax} + e^{a\cdot 0}\delta_0$. aE мүшесін шегерсек, δ_0 қалады. E-нің тасымалдаушысы оң жарты осьте жатқандықтан, $E * f$ нүктедегі мәнді есептегенде көздің бұрынғы мәндері ғана қатысады.

Екінші ретті операторлардың фундаменталдық шешімі

ТЕОРЕМА

$L = D^2 + bD + c$ болсын. $e'' + be' + ce = 0$, $e(0) = 0$, $e'(0) = 1$ болса, $E = He$ функциясы $LE = \delta_0$ теңдігін қанағаттандырады.

$$(D^2 + bD + c)(He) = \delta_0$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Екінші ретті операторлың фундаменталдық шешімі

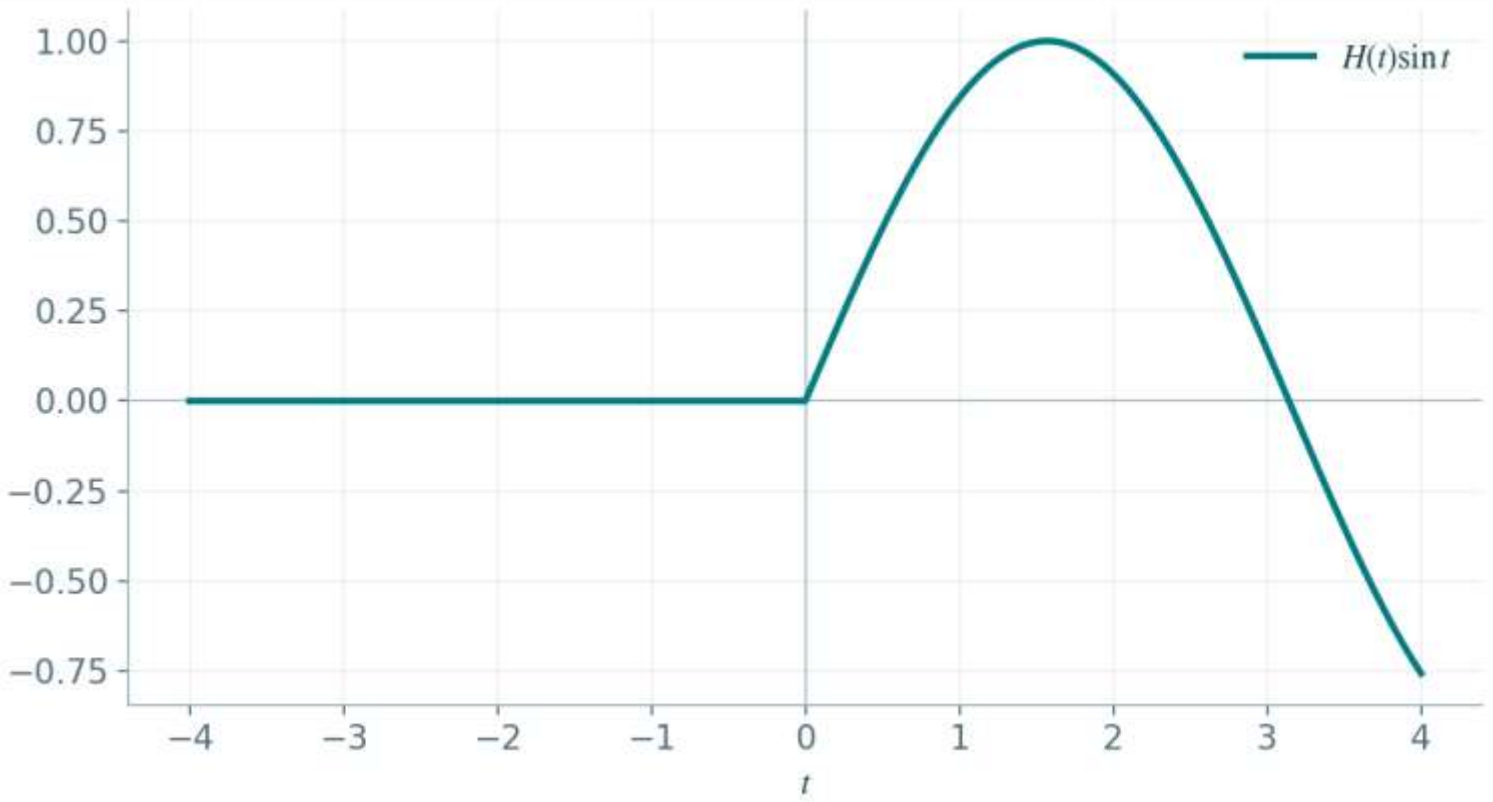
Нөлге жалғастыру үшін $D(He) = He' + e(0)\delta_0$. Екінші рет дифференциалдасақ, $D^2(He) = He'' + e'(0)\delta_0 + e(0)\delta_0{}'$.

Дәлелдеу · 2-қадам

Екінші ретті операторлың фундаменталдық шешімі

Операторды қолданғанда $LE = H(e'' + be' + ce) + (e'(0) + be(0))\delta_0 + e(0)\delta_0{}'$. Үш шартты орнына қойғанда бірінші және соңғы мүшелер нөлге тең, δ_0 коэффициенті 1 болады.

Импульске берілетін жауап



Графикті оқу

$L = D^2 + 1$ үшін $E(t) = H(t)\sin t$. Нөлдің оң жағында E туындысы 1-ден басталады.

Түсіндірме

$E = H(x)e^{ax}$ формуласын нүктелік көздің салдары ретінде оқуға болады. $x < 0$-де $E = 0$, $x > 0$-де $E' - aE = 0$. Тек $x = 0$-де секіріс 1-ге тең. Дельта мүшесі дәл осы секірістен шығады.

Өзіндік жұмыс

$L = D^3$ үшін оң жарты осьте тасымалданған E табыңыз. Жауап: $E = x^2 H/2$. Үш туындыны кезекпен алып тексеріңіз.

Фундаменталдық шешімнің бірмәнділігі

Фундаменталдық шешімнің бірмәнділігі. Егер $LE_1 = \delta_0$ және $LE_2 = \delta_0$ болса, сызықтылықтан $L(E_1 - E_2) = 0$. Сондықтан екі фундаменталдық шешімнің айырмасы біртекті теңдеуді шешеді. Мысалы, D операторы үшін H және $H - 1$ екеуі де фундаменталдық шешім, өйткені тұрақтының туындысы нөл. H оң жарты осьте, $H - 1$ теріс жарты осьте тасымалданады. Уақыт бойынша есепте оң жарты осьті таңдау бастапқы мезеттен бұрын жауаптың болмауын білдіреді.

Тұрақты коэффициентті операторға импульстік жауап

Екінші ретті $L = D^2 + bD + c$ операторын қарайық. $t > 0$-де $e'' + be' + ce = 0$ біртекті теңдеуін шешіп, $E = He$ деп аламыз. Жалпыланған туындыларды жазайық: $DE = He' + e(0+)\delta_0$ және $D^2E = He'' + e'(0+)\delta_0 + e(0+)\delta_0{}'$. Оларды L-ге қойсақ, оң жарты осьтегі мүшелер біртекті теңдеу арқылы жойылады.

$$LE = e(0^+)\delta_0{}' + [e'(0^+) + be(0^+)]\delta_0.$$

Тұрақты коэффициентті операторға импульстік жауап

Сондықтан $e(0+) = 0$ және $e'(0+) = 1$ шарттарын қоямыз. Бұлар орындалса, $LE = \delta_0$. Екі бастапқы шарттың рөлі бөлек: біріншісі $\delta_0{}'$ мүшесін жояды, екіншісі δ_0 коэффициентін 1-ге тең етеді.

Тұрақты коэффициентті операторға импульстік жауап

Мысал. $L = D^2 + \omega^2$, $\omega > 0$ болсын. Біртекті шешім $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. $e(0) = 0$-ден $A = 0$, $e'(0) = 1$-ден $B = 1/\omega$. Демек $E(t) = H(t)\sin(\omega t)/\omega$. E нөлде үзіліссіз болғанымен, оның бірінші туындысы нөлден бірге секіреді. Екінші туындыдағы δ_0 осыдан пайда болады.

Тұрақты коэффициентті операторға импульстік жауап

Қолдану. f оң жарты осьте тасымалданса, $E * f$ анықталған. $u = E * f$ өрнегін дифференциалдық операторға қойғанда $Lu = f$ алынады. Егер f локальді интегралданатын функция болса, $t > 0$-де үйірткі $\int_0^t e(t-s)f(s)ds$ интегралына айналады. Бұл жерде шешімнің t мезетіндегі мәні тек $s \leq t$ деректеріне тәуелді.

Тұрақты коэффициентті операторға импульстік жауап

Оң жарты осьтегі бірмәнділік. L тұрақты коэффициентті оператор болсын және E_1, E_2 екеуінің де тасымалдаушысы $[0, \infty)$-та жатсын. Осы жағдайда $E_1 * E_2$ анықталған. L операторын үйірткінің бір жағына да, екінші жағына да көшіруге болады. Сондықтан $L(E_1 * E_2) = (LE_1) * E_2 = \delta_0 * E_2 = E_2$. Екінші жағынан $L(E_1 * E_2) = E_1 * (LE_2) = E_1$. Демек $E_1 = E_2$. Бұл дәлелдеуде оң жарты ось шарты үйірткінің бар болуын қамтамасыз етеді.

Шығарылған есеп

$L = D^2 - 2D + 1 = (D-1)^2$ операторының оң жарты осьте тасымалданған фундаменталдық шешімін табайық. Сипаттамалық теңдеудің $\lambda = 1$ еселі түбірі бар. Сондықтан $e(t) = (A + Bt)e^t$. $e(0) = 0$-ден $A = 0$, $e'(0) = 1$-ден $B = 1$ шығады.

$$E(t) = tH(t)e^t, \qquad (D-1)E = H(t)e^t, \qquad (D-1)^2E = \delta_0.$$

Ортаңғы теңдікті тексерейік

Ортаңғы теңдікті тексерейік. E-ні туындылатқанда $H(t)(1+t)e^t$ және $t\ e^t\delta_0$ шығады. Екінші мүше нөл. E-ні шегергенде $H(t)e^t$ қалады. Келесі дифференциалдауда $H'(t)e^t = \delta_0$ пайда болады. Осылайша шешімді бастапқы шарттармен де, операторды жіктеу арқылы да таптық.

Екінші есеп

$L = D^2$ үшін $f = \delta_a$ болсын. $E = tH(t)$ таңдасақ, $u = E * \delta_a = (t-a)H(t-a)$. Оның екінші туындысы δ_a. Нүктелік көз оңға a шамасына ығысқанда жауап та дәл солай ығысады.

Өзіндік жұмыс

1) $D + 2$ операторы үшін оң жарты осьтегі фундаменталдық шешімді табыңыз.

2) $D^2 - 1$ үшін $e(0) = 0$, $e'(0) = 1$ шарттарынан E табыңыз.

3) D^2 үшін екі фундаменталдық шешімнің айырмасы қандай түрде болады?

Жауаптарды тексеру

1) $H(t)e^{-2t}$. 2) $H(t)sinh\ t$. 3) $At + B$, өйткені айырманың екінші жалпыланған туындысы нөл.

Қосымша есеп

$L = D + 2$ және $f = H$ болсын. $E = H(t)e^{-2t}$. $t > 0$ үшін $(E * f)\ (t) = \int_0^t e^{-2(t-s)}ds = (1 - e^{-2t})/2$. Бұл өрнек нөлде үздіксіз жалғасады, сондықтан туындысында дельта шықпайды. Классикалық туынды мен екі еселенген функцияны қоссақ, оң жақта 1 шығады. Теріс жарты осьте екеуі де нөл. Демек $(D + 2)(E * f) = H$ теңдігі бүкіл осьте орындалады.

Өзіндік тапсырмалар

01 $L = D^2 + 4$ үшін оң жарты осьте тасымалданатын E-ні табыңыз және тексеріңіз.

02 $L = D - 3$ үшін E-ні қолданып, $Lu = \delta_2$ есебінің оң жаққа таралатын шешімін табыңыз.

Қорытынды

Фундаменталдық шешім $LE = \delta_0$ теңдігін қанағаттандырады. Екінші ретті оператор үшін $e(0) = 0$ және $e'(0) = 1$ шарттары қажетті дельта мүшесін береді.

Бақылау сұрақтары

01 $e(0) = 0$ шарты қай сингуляр мүшені жояды?

02 $E * f$ өрнегі қандай жағдайда $Lu = f$ теңдеуінің дербес шешімін береді?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §5, 139–144-б.; §6, 157–170-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.