Жалпыланған функциялар

9-дәріс

Тензорлық көбейтінді

Екі айнымалы бойынша жұптастыру және тасымалдаушы

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. Жалпыланған функцияларға амалдар

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Екі кеңістіктегі жалпыланған функциялардың бірлескен әсерін есептеу.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Тензорлық көбейтіндінің тасымалдаушысы
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

$F \in D'(\mathbb{R}^n)$, $G \in D'(\mathbb{R}^m)$ берілсін. $\Phi(x,y)$ сынақ функциясын алдымен y айнымалысы бойынша G-ге, содан соң шыққан x функциясын F-ке береміз. Бірінші қадамда x бойынша туындыны ішке өткізуге болады. Себебі Φ-дің барлық туындысы ортақ компактта бақыланады және G сол компакттағы ақырлы реттегі жартылай нормалармен бағаланады. Шыққан функцияның тасымалдаушысы Φ тасымалдаушысының x осьтеріне проекциясынан аспайды.

$$\langle F \otimes G, \Phi \rangle = \langle F(x), \langle G(y), \Phi(x,y) \rangle \rangle.$$

Негізгі ұғымдар

Егер $\Phi = \varphi(x)\psi(y)$ болса, әсер $\langle F, \varphi\rangle\langle G, \psi\rangle$ көбейтіндісіне айналады. Осы қасиет арқылы тензорлық көбейтіндіні тануға болады. Регуляр жағдайда нәтиже $f(x)g(y)$ функциясына сәйкес келеді, бұл Фубини теоремасынан шығады.

Шығарылған мысал

$\langle \delta_a \otimes \delta_b, \Phi \rangle = \Phi(a, b)$. Демек тасымалдаушысы — {(a,b)}. Ал $\langle \delta_0 \otimes 1, \Phi \rangle = \int \mathbb{R} \Phi(0, y) dy$. Мұндағы әсер бүкіл тік ось бойындағы мәндерді пайдаланады, сондықтан тасымалдаушы {0}× $\mathbb{R}$.

Тензорлық көбейтіндінің корректілігі

ТЕОРЕМА

$F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ болса, $\langle F \otimes G, \Phi \rangle = \langle F_x, \langle G_y, \Phi(x,y) \rangle \rangle$ формуласы жалпыланған функция анықтайды.

$$\langle F \otimes G, \Phi \rangle = \langle F_x, \langle G_y, \Phi(x,y) \rangle \rangle$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Тензорлық көбейтіндінің корректілігі

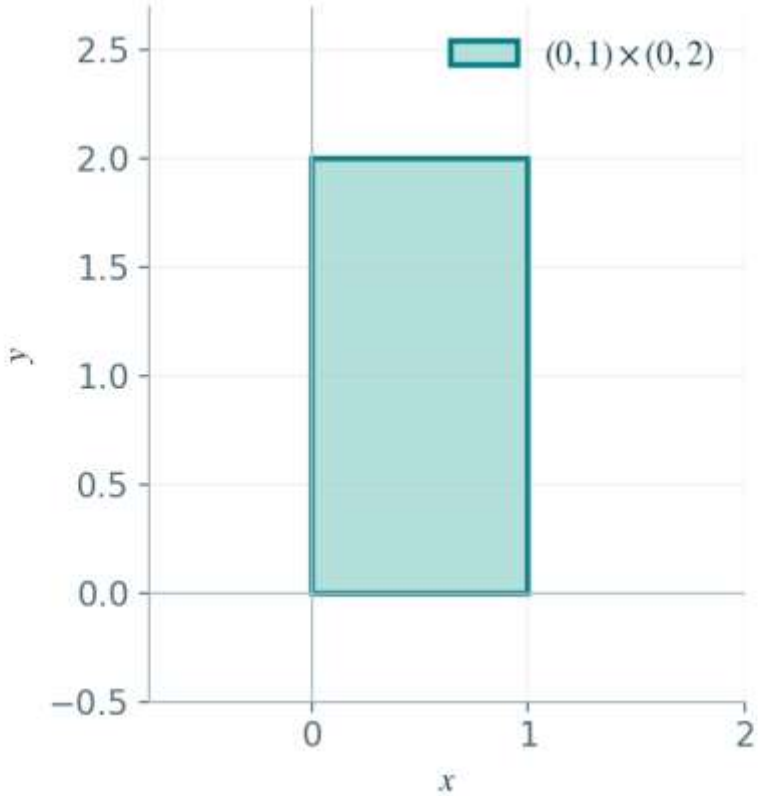
supp $\Phi \subset K \times L$ деп аламыз. $\Psi(x) = \langle G, \Phi(x,\cdot)\rangle$ функциясы K-дан тыс нөл. Айырымдық қатынастар L-де барлық y-туындыларымен жинақталады, сондықтан G үзіліссіздігінен $\partial_x^\alpha \Psi = \langle G, \partial_x^\alpha \Phi\rangle$.

Дәлелдеу · 2-қадам

Тензорлық көбейтіндінің корректілігі

L-дегі G бағасы $|\partial_x^{\alpha}\Psi| \le C_G$ max_$|\beta| \le q$ sup|∂ₓᵅ∂ᵧᵝΦ| береді. K-дегі F бағасын қолдансақ, $|\langle F, \Psi\rangle| \le C_F\ C_G$ max_$|\alpha| \le p, |\beta| \le q$ sup|∂ₓᵅ∂ᵧᵝΦ|. Бұл сызықтық функционалдың үзіліссіздігін дәлелдейді.

Тензорлық көбейтіндінің тасымалдаушысы



Графикті оқу

Екі индикатордың тензорлық көбейтіндісі жазықтықтағы тікбұрыштың индикаторын береді.

Түсіндірме

Туынды тиісті айнымалы бойынша өз көбейткішіне ғана әсер етеді. Мысалы, $\partial_x(F \otimes G) = (F' \otimes G)$. Тексеру үшін $\partial_x \Phi$-ді ішкі жұптастыруға қойып, x бойынша дифференциалдауды сыртқа шығарамыз. Таңба F' анықтамасымен сәйкес келеді.

Өзіндік жұмыс

$\langle \delta_a{}' \otimes \delta_b, \Phi \rangle$ табыңыз. Жауап: $-\partial_x \Phi(a, b)$. Алдымен $y = b$ қойып, содан соң x бойынша туындылатыңыз.

Айнымалыларды бөліп қарау

Айнымалыларды бөліп қарау. $\Phi(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$ түрінде болғанда ішкі функционал ψ-ге әсер етіп, $\varphi(x)$ алдында тұрақты коэффициент қалдырады. Мысалы, $F=\delta_0{}'$ және $G=\delta_1$ болса, $\langle F\otimes G,\Phi\rangle=-\varphi'(0)\psi(1)$. Ал Φ көбейтінді түрінде берілмесе, алдымен $y=1$ қойып, $x\mapsto\Phi(x,1)$ функциясын аламыз. Осы функцияның $x=0$ нүктесіндегі туындысын минус таңбасымен жазамыз.

Тензорлық көбейтіндінің тасымалдаушысы

$F(x)$ және $G(y)$ әртүрлі айнымалыларда әсер етеді. Сондықтан тензорлық көбейтінді $\mathbb{R}^{n+m}$ кеңістігінде анықталады. Мысалы, $F = \delta_0$ және $G = H$ болса, $\langle F \otimes G, \Phi \rangle = \int_0^{\infty} \Phi(0, y)dy$. Бұл өрнек оң тік жарты осьтегі мәндерді пайдаланады. Φ сол жарты осьтің маңында нөл болса, жұптастыру да нөл.

$$\operatorname{supp}(F \otimes G) = \operatorname{supp} F \times \operatorname{supp} G.$$

Бірінші бағытты тексерейік

Бірінші бағытты тексерейік. Егер x_0 supp F-ке кірмесе, оның F нөл болатын U маңы бар. $U \times V$ ішінде тасымалданатын Φ функциясы үшін y бойынша G-ге бергеннен кейінгі функция U ішінде тасымалданады. Сондықтан F-ке бергенде нөл шығады. y_0 supp G-ке кірмейтін жағдай да осыған ұқсас. Кері бағытта $x_0 \in \operatorname{supp} F$, $y_0 \in \operatorname{supp} G$ болсын. Кез келген $U \times V$ маңынан $\langle F, \varphi \rangle \neq 0$ және $\langle G, \psi \rangle \neq 0$ болатындай $\varphi \in D(U)$, $\psi \in D(V)$ табамыз. $\Phi(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ үшін екі санның көбейтіндісі нөлден өзгеше. Демек (x_0, y_0) тасымалдаушыға кіреді.

Тензорлық көбейтіндінің тасымалдаушысы

Координаталар бойынша аралас туындыларды есептеуде екі функционал өз айнымалысында қалады. Мысалы, $\partial_x\partial_y(\delta_0 \otimes H)=\delta_0' \otimes \delta_0$. Бұл функционалдың әсері $-\partial_x \Phi(0,0)$. Таңбаны x айнымалысы бойынша δ' анықтамасы береді.

Тензорлық көбейтіндінің тасымалдаушысы

Тензорлық көбейтіндінің реті. Егер координаталарды алмастырып $\Psi(y,x)=\Phi(x,y)$ десек, $\langle G\otimes F,\Psi\rangle=\langle F\otimes G,\Phi\rangle$. Қарапайым көбейтінді сынақ функцияларында екі жұптастыру да $\langle F,\varphi\rangle\langle G,\psi\rangle$ санына тең. Жалпы Φ үшін осы қасиет ақырлы қосындылардың сынақ функциялары кеңістігіндегі тығыздығы мен функционалдардың үздіксіздігі арқылы жалғасады. Координаталарды алмастырғанда тасымалдаушының екі көбейткіші де орын ауыстырады.

Шығарылған есеп

$F = \delta_1{}'$, $G = 1_{0,2}$ болсын. Алдымен G-нің әсерін есептейміз: $\psi(x) = \int_0^2 \Phi(x,y)dy$. Енді F-ті қолдансақ, $-\psi'(1)$ шығады. Φ тегіс және интеграл аралығы шектелген, сондықтан туындыны интеграл астына өткіземіз.

$$\langle \delta_1{}' \otimes \mathbf{1}_{(0,2)}, \Phi \rangle = -\int_0^2 \partial_x \Phi(1,y)\, dy.$$

Екінші есеп

Алынған функционалды y бойынша туындылатайық. Анықтама бойынша $-\langle F \otimes G, \partial_y \Phi \rangle$ аламыз. Алдыңғы формулаға қойғанда $\int_0^2 \partial_x \partial_y \Phi(1,y)dy = \partial_x \Phi(1,2) - \partial_x \Phi(1,0)$. Нәтиже $\delta_1' \otimes (\delta_0 - \delta_2)$ әсерімен сәйкес. Бұл есепте y бойынша туынды интегралдың екі шетін бөліп көрсетеді.

Өзіндік жұмыс

1) $\langle \delta_0 \otimes \delta_2', \Phi \rangle$ есептеңіз.

2) $F = H$, $G = H$ үшін $F \otimes G$ қай аймақ бойынша интеграл береді?

3) $\delta_0 \otimes 1$ және $1 \otimes \delta_0$ функционалдарының тасымалдаушыларын салыстырыңыз.

4) $\partial_x(1 \otimes \delta_0)$ табыңыз.

Жауаптарды тексеру

1) $-\partial_\gamma \Phi(0,2)$. 2) $x > 0$, $y > 0$ ширегі. 3) Біріншісі $\{0\} \times \mathbb{R}$, екіншісі $\mathbb{R} \times \{0\}$. 4) Нөл, өйткені тұрақты 1-дің жалпыланған туындысы нөл.

Қосымша есеп

$\Phi(x,y)=\eta(x)\eta(y)$ және $T=\delta_0\otimes\delta_0{}'$ болсын. $\langle T,\Phi\rangle=-\eta(0)\eta'(0)=0$, себебі η жұп. Енді $\Psi(x,y)=y\eta(x)\eta(y)$ таңдасақ, $\partial_y\Psi(0,0)=\eta(0)^2$. Сондықтан $\langle T,\Psi\rangle=-\eta(0)^2\neq 0$. Бұл мысалда бірінші сынақ функциясы функционалдың әсерін байқамады, ал екінші сынақ функциясының сызықтық көбейткіші оны анық көрсетті.

Өзіндік тапсырмалар

01 $\delta_1{}' \otimes \delta_2$ функционалының $\Phi(x,y)$-ға әсерін жазыңыз.

02 $\mathbb{1}_{(0,1)} \otimes \mathbb{1}_{(-1,1)}$ тасымалдаушысын табыңыз және сызбада көрсетіңіз.

Қорытынды

Тензорлық көбейтінді екі айнымалы тобына ретімен әсер етеді. Компакттағы бағалар алынған функционалдың үзіліссіздігін көрсетеді.

Бақылау сұрақтары

01 Ішкі жұптастыру нәтижесі неліктен тегіс функция болады?

02 Тензорлық көбейтінді мен үйірткінің айнымалылары қалай ерекшеленеді?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §5, 131–134-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.