Жалпыланған функциялар

10-дәріс

Үйірткі және оның қасиеттері

Үйірткінің анықталу шарты және есептеу

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. Жалпыланған функцияларға амалдар

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Үйірткі (свертка) анықтамасын қолдану және оның бар болу шартын тексеру.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Үйірткінің бар болуы және тасымалдаушысы
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

Кәдімгі функциялардың үйірткісі $(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy$. Жалпыланған функциялар үшін $y+z$ қосу бейнелеуін қолданамыз. $\varphi(y+z)$ бүкіл жазықтықта компакт тасымалдаушыға ие болмауы мүмкін. Сондықтан $\Phi = \chi(y,z)\varphi(y+z)$ аламыз. Мұндағы χ сынақ функциясы тиісті тасымалдаушылар қиылысының маңында 1-ге тең.

$$\langle F * G, \varphi \rangle = \langle F(y), \langle G(z), \chi(y,z)\varphi(y+z) \rangle \rangle.$$

Негізгі ұғымдар

Егер әрбір компакт K үшін $\operatorname{supp} F \times \operatorname{supp} G$ жиынының $y + z \in K$ шартымен қиылысуы компакт болса, χ-ны таңдай аламыз. Нәтиже χ таңдауынан тәуелсіз, өйткені екі таңдаудың айырмасы тензорлық көбейтіндінің тасымалдаушысы маңында нөл. Жеткілікті шарттың бірі — екі тасымалдаушының кемінде біреуі компакт. Екеуі де $[0, \infty)$-та жатса, берілген шарт тағы орындалады. Анықталған үйірткі ауыстырымды. Туындыны бір көбейткішке көшіруге болады: $D(F * G) = (DF) * G = F * (DG)$.

Шығарылған мысал

$\delta_a * F = F(x-a)$, өйткені $\varphi(y+z)$ өрнегінде $y = a$ қалады. $H * H$ үшін $x > 0$ кезінде интеграл $0 \leq y \leq x$ аралығында ғана қалады және x шығады. $x < 0$ кезінде интеграл нөл. Демек $H * H = xH$.

Үйірткінің анықталу шарты

ТЕОРЕМА

$A = \operatorname{supp} F$, $B = \operatorname{supp} G$ болсын. Әр компакт K үшін $\{(y,z) \in A \times B : y+z \in K\}$ компакт болса, $F * G$ анықталады және $\operatorname{supp}(F * G) \subset A + B$.

$$\langle F * G, \varphi \rangle = \langle F \otimes G, \chi(y,z)\varphi(y+z) \rangle$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Үйірткінің анықталу шарты

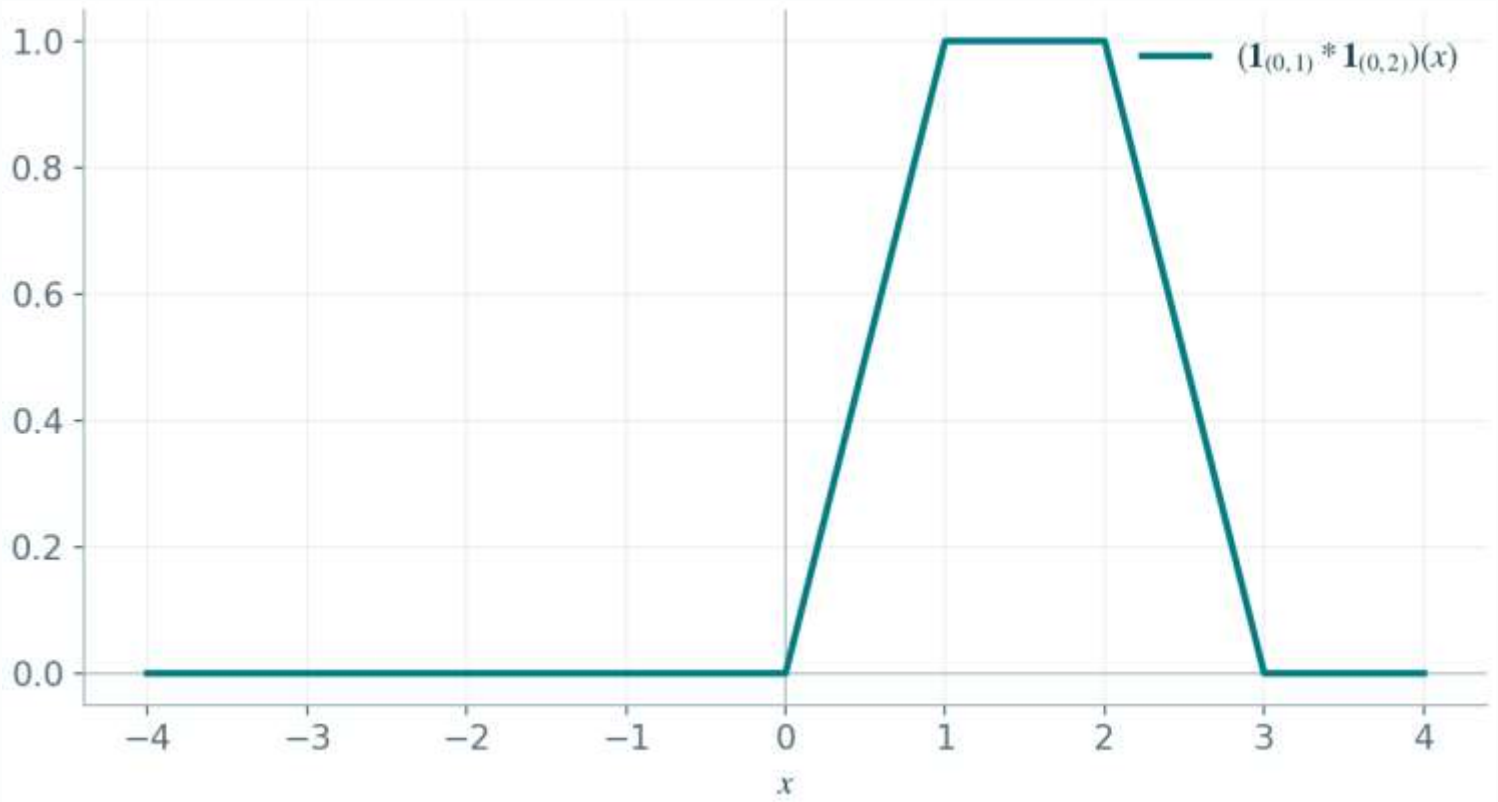
$\varphi \in \mathcal{D}$, supp $\varphi \subset K$ үшін $\chi(y,z)$ тегіс компакт қиғышын осы компакт жиынның маңында 1 етіп аламыз. $\langle F * G, \varphi\rangle = \langle F \otimes G, \chi(y,z)\varphi(y+z)\rangle$ деп анықтаймыз. Екі қиғыштың айырмасынан алынған сынақ функциясы $A \times B$ маңында нөл, сондықтан нәтиже қиғыштан тәуелсіз.

Дәлелдеу · 2-қадам

Үйірткінің анықталу шарты

Ортақ K үшін бір χ жеткілікті. Туындыны Лейбниц және тізбек ережесімен бағаласақ, $F \otimes G$-нің компактағы бағасы φ-дің ақырлы санды жартылай нормаларымен шектеледі. $K \cap (A + B) = \emptyset$ болса, жұптастыру нөл. Шарттан $A + B$ тұйық: $y_j + z_j \to x$ кезінде жұптардың жинақталатын ішкі тізбегі бар. Осыдан тасымалдаушыға енгізу шығады.

Үйірткі және қиылысу ұзындығы



Графикті оқу

Үйірткі биіктігі (0,1) және $(x-2, x)$ аралықтарының қиылысу ұзындығына тең.

Түсіндірме

Үйірткі D' кеңістігіндегі әрбір жұп үшін анықталмайды. Мысалы, $1 * 1$-ді кәдімгі интеграл арқылы есептесек, $\int \mathbb{R}1\ \mathrm{d}y$ шашырайды. Тасымалдаушылардың қосындысы 0 болатын $(y, -y)$ жұптары да шектелмеген, сондықтан жоғарыдағы жеткілікті шарт орындалмайды.

Өзіндік жұмыс

$\delta_a * \delta_b$ табыңыз. Жауап: $\delta_{a+\beta}$, өйткені жұптастыру $\varphi(a+b)$ болады.

Үйірткінің интегралдағы мағынасы

Үйірткінің интегралдағы мағынасы. x бекітілгенде $g(x-y)$ функциясы y бойынша алдымен шағылыстырылады, содан кейін x-ке байланысты ығысады. $f(y)g(x-y)$ көбейтіндісін интегралдау екі функцияның сол ығысу кезіндегі қабаттасуын өлшейді. Егер f пен g аралықтардың индикаторлары болса, нәтиже олардың тиісті қиылысу ұзындығына тең. Сондықтан шектері бар қарапайым функциялар арқылы үйірткінің графигін бөліктерге бөліп есептеуге болады. Оқуға арналған бөлімдер · Фалалеев, §10, 56–74-б.; Бельхеева, §3.3, 64–69-б.

Үйірткідегі φ(y+z) тек y+z қосындысына тәуелді

Үйірткідегі $\varphi(y+z)$ тек $y+z$ қосындысына тәуелді. Егер φ-дің тасымалдаушысы K болса, маңызды жұптар supp $F \times \operatorname{supp} G$ ішінде және $y+z \in K$ шартын қанағаттандырады. Мысалы, supp $F \subset [0,\infty)$, supp $G \subset [0,\infty)$ және $K \subset [-R,R]$ болса, $y,z \geq 0$ әрі $y+z \leq R$. Демек $0 \leq y,z \leq R$. Тиісті жұптар тұйық және шектелген, сондықтан компакт.

Үйірткінің бар болуы және тасымалдаушысы

Осы шарт кезінде $\operatorname{supp}(F * G) \subset \operatorname{supp} F + \operatorname{supp} G$. Мұны көру үшін қосынды жиыннан тыс компактта тасымалданған φ аламыз. Онда $\varphi(y+z)$ тензорлық көбейтінді тасымалдаушысының маңында нөл болады. Үйірткінің жұптастыруы да нөл. Қарастырылған компакттық шарт қосынды жиынның тұйық болуын қамтамасыз етеді. Шынында, қосындылардың жинақталатын тізбегі компактқа сыйса, сол қосындыларға сәйкес жұптардан жинақталатын ішкі тізбек алуға болады.

$$D(\delta_a * F) = \delta_a{}' * F = (DF)(x-a).$$

Үйірткінің бар болуы және тасымалдаушысы

Бірінші теңдікті жұптастырумен тексереміз. $\delta_a{}'$ әсерін y бойынша қолданғанда $-\varphi'(a+z)$ шығады. Бұл $F(x-a)$ функциясын жалпыланған мағынада туындылатудың анықтамасына дәл келеді.

Үйірткінің бар болуы және тасымалдаушысы

Үйірткінің реті ауысқанда y және z айнымалыларының аттары ғана өзгереді. Ал үш функционалдың үйірткісін алғанда барлық тиісті үштіктер үшін компакттық шартты тексеру керек. Үшеуінің де тасымалдаушысы оң жарты осьте жатса, $y + z + w \leq R$ әр координатаны шектейді және екі топтастыру бір нәтижеге келеді.

Үйірткінің бар болуы және тасымалдаушысы

Бірлік элементі және ығыстыру. $\delta_0 * F = F$, өйткені жұптастыруда $\varphi(y+z)$ өрнегіне $y=0$ қойылады. $\delta_a * F = F(x-a)$ болса, $y=a$ қоюдан шығады. Демек $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$. Бұл теңдікте дельталардың массалары 1 болғандықтан, нәтиженің массасы да 1. Егер олардың алдында c және d коэффициенттері тұрса, сызықтылықтан нәтиже $cd\delta_{a+b}$ болады. Осы ереже бірнеше нүктелік көздің бірлескен әсерін есептеуге мүмкіндік береді.

Шығарылған есеп

$f = 1_{0,1}$, $g = 1_{0,2}$ болсын. $f(y)g(x-y)$ көбейтіндісі $0 < y < 1$ және $0 < x - y < 2$ шарттары қатар орындалғанда 1 болады. Екінші шартты y бойынша жазсақ, $x - 2 < y < x$. Сондықтан үйірткі (0,1) және $(x-2, x)$ аралықтарының қиылысу ұзындығына тең.

$$(f * g)(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 \le x \le 2, \\ 3 - x, & 2 < x < 3, \\ 0, & \text{қалған } x \text{ үшін.} \end{cases}$$

Практикум және өзіндік жұмыс

$x \in (0,1)$ кезінде қиылысу (0,x), $x \in [1,2]$ кезінде (0,1), ал $x \in (2,3)$ кезінде $(x-2,1)$. Сыртта қиылысу бос. Алынған функция үзіліссіз және [0,3] кесіндісінде тасымалданады.

Енді туындысын үйірткі арқылы табайық

Енді туындысын үйірткі арқылы табайық. $Df = \delta_0 - \delta_1$. Сондықтан $D(f * g) = g(x) - g(x-1)$. Бұл (0,1)-де 1, (1,2)-де 0, (2,3)-те -1. Нәтиже бөліктердегі көлбеулермен сәйкес.

Өзіндік жұмыс

1) $H * H * H$ өрнегін $x > 0$ үшін интеграл арқылы есептеңіз.

2) ${\delta_2}' * H$ үйірткісін табыңыз.

3) $f = 1_{0,1}$ және $g = 1_{-1,0}$ үшін $f * g$ қай аралықта нөлден өзгеше?

Жауаптарды тексеру

1) $x^2/2$, $x \le 0$ кезінде нөл. 2) δ_2, себебі $H' = \delta_0$. 3) $(-1,1)$. Бұл аралықта қиылысу ұзындығы оң, ал тасымалдаушысы $[-1,1]$.

Қосымша есеп

$f = 1_{0,1}$, $g = \delta_0 + 2\delta_2$ болсын. Сызықтылық бойынша $f * g = f(x) + 2f(x-2)$. Демек нәтиже (0,1)-де 1, (2,3)-те 2, басқа жерлерде нөлге тең. Оның тасымалдаушысы $[0,1] \cup [2,3]$. Тапсырма. Осы функцияның жалпыланған туындысын табыңыз. Жауабы $\delta_0 - \delta_1 + 2\delta_2 - 2\delta_3$. Оны үйірткі арқылы да тексеруге болады: $Df = \delta_0 - \delta_1$, содан кейін әрбір дельтаны g-мен үйірткілейміз.

Өзіндік тапсырмалар

01 $\delta_2'*\mathbb{1}_{(0,1)}$ өрнегін есептеңіз.

02 $\mathbb{1}_{(0,1)}*\mathbb{1}_{(0,1)}$ графигін аралықтардың қиылысу ұзындығы арқылы салыңыз.

Қорытынды

Үйірткі қосынды бейнелеуі арқылы анықталады. Тасымалдаушыларға қойылған компакт шарты осы анықтаманың жұмыс істеуін қамтамасыз етеді.

Бақылау сұрақтары

01 Екі тасымалдаушы да $[0, \infty)$-де жатса, компакт шарты неге орындалады?

02 Үйірткінің туындысын қай көбейткішке қолдануға болады?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §5, 134–138-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.