ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

6-ДӘРІС

ВЕКТОРЛЫҚ ТАЛДАУ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Градиент, Дивергенция, Ротор және Остроградский-Гаусс теоремасы

§ 6.1. Скалярлық өріс және деңгейлік беттер

Скалярлық өріс: Кеңістіктің V облысының әрбір M(x, y, z) нүктесіне **u = u(x, y, z)** скалярлық шамасы сәйкес қойылса, онда V облысында скалярлық өріс берілді дейміз.

Деңгейлік беттер: $u(x, y, z) = C$ (тұрақты) теңдеуімен анықталатын беттер.

§ 6.2. Скалярлық өрістің градиенті

Анықтама: *u(x, y, z)* скалярлық функциясының дербес туындыларынан құралған вектор **градиент** деп аталады:

$$\boldsymbol{grad\ u} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}}\,\boldsymbol{k}$$

Градиент өрістің ең жылдам өсу бағытын көрсетеді.

§ 6.3. Бағыт бойынша туынды

l = (cos α, cos β, cos γ) бағыты бойынша туынды градиенттің осы векторға скаляр көбейтіндісіне тең:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = grad\ u \cdot l = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

§ 6.4. Векторлық өріс анықтамасы

Векторлық өріс: Кеңістіктің V облысының әрбір нүктесіне $\mathbf{F(M) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k}$ векторы сәйкес қойылса, V-де векторлық өріс берілді дейміз.

Өріс сызықтары: Әрбір нүктедегі жанамасы **F** векторына бағыттас болатын қисықтар.

§ 6.5. Векторлық өрістің дивергенциясы

Анықтама: $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ векторлық өрісінің **дивергенциясы** деп мына скалярлық шаманы айтамыз:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

§ 6.6. Дивергенцияның физикалық мағынасы

Дивергенция берілген нүктедегі **көздердің (источник)** немесе **батпақтардың (сток)** қуаттылығын білдіреді:

1. **div F > 0** — бұл нүктеде **көз (бастау)** бар.
2. **div F < 0** — бұл нүктеде **батпақ (жұтылу)** бар.
3. **div F = 0** — көз де, батпақ та жоқ (соленоидальды өріс).

§ 6.7. Остроградский-Гаусс теоремасы

Теорема:

Тұйық S беті арқылы өтетін өрістің сыртқы ағыны осы бетпен шектелген V көлемі бойынша алынған дивергенцияның үш еселі интегралына тең:

$$\oiint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_V div\, \boldsymbol{F}\, dV$$

§ 6.8. Векторлық өрістің роторы (құйыны)

Анықтама: F = (P, Q, R) өрісінің **роторы** (немесе құйыны) деп мына векторды айтамыз:

$$rot\ F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

§ 6.9. Набла (∇) дифференциалдық операторы

Набла операторы: $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$

§ 6.10. Соленоидальды векторлық өріс

Анықтама: Егер өрістің барлық нүктелерінде **div F = 0** болса, онда бұл өріс **соленоидальды (көзсіз)** өріс деп аталады.

Қасиеті: Мұндай өрісте тұйық бет арқылы өтетін ағын әрқашан **нөлге тең**.

§ 6.11. Потенциалдық векторлық өріс

Анықтама: Егер **rot F = 0** болса, өріс **потенциалды (құйынсыз)** деп аталады.

Мұндай өрісте **F = grad u** орындалатын $u(x,y,z)$ потенциалдық функциясы бар болады.

§ 6.12. Лаплас операторы (Δ)

Градиенттің дивергенциясы **Лаплас операторын** береді:

$$\Delta u = div\,(grad\,u) = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$\Delta u = 0$ теңдеуі **Лаплас теңдеуі** деп аталады.

§ 6.13. Векторлық талдаудағы тепе-теңдіктер

1. **rot (grad u) = 0** (Кез келген скаляр өрістің градиентінің құйыны нөлге тең).
2. **div (rot F) = 0** (Кез келген құйын өрісінің дивергенциясы нөлге тең).

§ 6.14. Типтік мысал есеп

Мысал: $\mathbf{F} = \mathbf{x}\,\mathbf{i} + \mathbf{y}\,\mathbf{j} + \mathbf{z}\,\mathbf{k}$ өрісінің $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферасы арқылы ағынын Остроградский-Гаусс формуласымен табыңыз.

Шешуі: $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$.

$$\Phi = \iiint_V 3\,dV = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\,\pi R^3\right) = 4\,\pi R^3.$$

§ 6.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: Векторлық талдау өрістердің локальдік дифференциалдық сипаттамаларын (grad, div, rot) және интегралдық теоремаларды (Остроградский-Гаусс, Стокс) біріктіреді.

СӨЖ тапсырмалары:

1. $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ радиус-векторы үшін $div\,\mathbf{r}$ мен $rot\,\mathbf{r}$ мәндерін есептеңіз.
2. $u = 1 / r$ Ньютон потенциалы үшін $\Delta u = 0$ болатынын дәлелдеңіз.