ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

11-ДӘРІС

СТИЛЬТЕС ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ БӨЛІКТЕП ИНТЕГРАЛДАУ

Г. М. Фихтенгольц курсы • 15-тарау (§ 9)

§ 11.1. Интегралданатын функция бойынша сызықтықтық

Теорема: Егер $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялары $g(x)$ бойынша интегралданатын болса, кез келген c_1, c_2 тұрақтылары үшін сызықтық комбинация да интегралданады:

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\, dg(x) = c_1 \int_a^b f_1(x)\, dg(x) + c_2 \int_a^b f_2(x)\, dg(x)$$

§ 11.2. Интегратор функциясы бойынша сызықтықтық

Теорема: Егер $f(x)$ функциясы $g_1(x)$ және $g_2(x)$ функциялары бойынша интегралданатын болса, онда кез келген k_1, k_2 үшін:

$$\int_a^b f(x)\, d[k_1 g_1(x) + k_2 g_2(x)] = k_1 \int_a^b f(x)\, dg_1(x) + k_2 \int_a^b f(x)\, dg_2(x)$$

§ 11.3. Интегралдау аралығы бойынша аддитивтілік

Кез келген $c \in (a, b)$ нүктесі үшін Стилтьес интегралы аралық бойынша аддитивті:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^c f(x)\,dg(x) + \int_c^b f(x)\,dg(x)$$

Бұл формула оң жақтағы интегралдардың бар болуымен пара-пар.

§ 11.4. Шектердің орнын ауыстыру

Стилтьес интегралы үшін шектердің орнын ауыстырғанда таңба қарама-қарсыға өзгереді және бірдей шектерде интеграл нөлге тең:

$$\int_b^a f(x)\,dg(x) = -\int_a^b f(x)\,dg(x),\ \int_a^a f(x)\,dg(x) = 0$$

§ 11.5. Интегралдық теңсіздіктер қасиеті

Егер $g(x)$ **өспелі (кемімейтін)** функция болып, $[a, b]$ кесіндісінде $f_1(x) \le f_2(x)$ орындалса:

$$\int_a^b f_1(x)\,dg(x) \le \int_a^b f_2(x)\,dg(x)$$

Атап айтқанда, егер $f(x) \ge 0$ болса, онда интеграл да **теріс емес** болады.

§ 11.6. Бірінші орта мән теоремасы

1-орта мән теоремасы:

Егер $f(x)$ үзіліссіз, ал $g(x)$ монотонды кемімейтін функция болса, онда сондай бір $\xi \in [a, b]$ нүктесі табылып, мына теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = f(\xi)\,[g(b) - g(a)]$$

§ 11.7. Бөліктеп интегралдау теоремасы

Бөліктеп интегралдау формуласы:

Егер $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ интегралы бар болса, онда $\int_a^b g(x)\,df(x)$ интегралы да бар болады және мына формула орындалады:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)\,df(x)$$

§ 11.8. Бөліктеп интегралдаудың симметриялығы

Сыртқы түрі: $[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df$

Бұл формула f мен g функцияларының рөлдерін толық симметриялы етеді. Ыңғайсыз интеграторды ыңғайлы функция орнына ауыстыруға мүмкіндік береді.

§ 11.9. Екінші орта мән теоремасы

2-орта мән теоремасы:

Егер $f(x)$ монотонды кемімейтін, ал $g(x)$ үзіліссіз функция болса, бөліктеп интегралдау мен 1-орта мән теоремасын біріктіру арқылы мына формула шығады ($\xi \in [a, b]$):

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(a)\int_a^{\xi} dg(x) + f(b)\int_{\xi}^b dg(x)$$

§ 11.10. Ауыспалы жоғарғы шегі бар интеграл

$F(x) = \int_a^x f(t)\, dg(t)$ функциясын $x \in [a, b]$ аралығында қарастырайық:

1. Егер $g(x)$ шекті вариациялы болса, $F(x)$ те **шекті вариациялы** болады.
2. Егер $g(x)$ үзіліссіз болса, $F(x)$ де **үзіліссіз** функция болады.

§ 11.11. Интегралдың үзіліссіздік сақталуы

Егер $g(x)$ монотонды болып, $f(x)$ шенелген болса, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dg(t)$ функциясының кез келген үзіліс нүктесі $g(x)$ функциясының үзіліс нүктесі болып табылады.

Яғни, $g(x)$ үзіліссіз болған барлық нүктелерде $F(x)$ міндетті түрде **үзіліссіз** болады.

§ 11.12. Модуль таңбасының интеграл ішіне өтуі

Монотонды кемімейтін $g(x)$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dg(x) \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dg(x)$$

Бұл қасиет нормаланған кеңістіктердегі функционалдарды бағалауға мүмкіндік береді.

§ 11.13. Орта мән теоремасының геометриялық салдары

Егер $g(x)$ – массаның таралу функциясы болса, 1-орта мән теоремасы бойынша $\int f\,dg = f(\xi)$

$M_{толық}$·

Бұл орташа мән $f(\xi)$ тұтас массаның белгілі бір ξ нүктесіндегі мәніне дәл келетінін көрсетеді.

§ 11.14. Бөліктеп интегралдауға мысал есеп

Мысал: Бөліктеп интегралдау арқылы $I = \int_0^1 x\, d(e^x)$ интегралын есептеңіз.

Шешуі: Бөліктеп интегралдау формуласын $f(x) = x$, $g(x) = e^x$ деп қолданамыз:

$$I = [x\, e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx = (1 \cdot e^1 - 0) - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1.$$

§ 11.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: Стилтьес интегралы классикалық интегралдың сызықтықтық, аддитивтілік, орта мән теоремалары сияқты барлық негізгі қасиеттерін сақтайды; бөліктеп интегралдау формуласы f мен g арасында толық симметрия орнатады.

СӨЖ тапсырмалары:

1. Бөліктеп интегралдау формуласы арқылы $\int_0^2 [x]\, d(x^2)$ интегралын есептеңіз.

2. Егер f кемімелі оң функция болса, 2-орта мән теоремасын пайдаланып $\int_a^b f\, dg$ өрнегін ықшамдаңыз.