ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

14-ДӘРІС

ЕКІ ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАР: АНЫҚТАМАСЫ ЖӘНЕ БАР БОЛУЫ

Г. М. Фихтенгольц курсы • 16-тарау (§ 1–2)

§ 14.1. Геометриялық есеп: Цилиндрлік дененің көлемі

Геометриялық қойылым: Төменнен Oxy жазықтығындағы тұйық квадрирленетін **(D)** облысымен, жан-жағынан цилиндрлік бетпен, ал жоғарыдан $z = f(x, y) \geq 0$ бетімен шектелген дененің **V көлемін** табу.

Бұл есеп бір айнымалы функциялар үшін қисықсызықты трапецияның ауданын табу есебінің кеңістіктегі тура аналогы болып табылады.

§ 14.2. Облысты элементар ұяшықтарға бөлшектеу

(D) облысын еркін $\Delta D_1, \Delta D_2, \ldots, \Delta D_n$ элементар облыстарына бөлеміз:

1. Әрбір ΔD_i элементар облысының ауданын ΔS_i деп белгілейміз.
2. $d_i - \Delta D_i$ облысының диаметрі (ең алыс екі нүкте арасының қашықтығы).
3. Бөлшектеу қадамы: $\boldsymbol{\lambda = \max d_i}$.

§ 14.3. Риманның екі еселі интегралдық қосындысы

Әрбір ΔD_i элементар облысынан еркін $M_i(\xi_i, \eta_i)$ нүктесін таңдап, элементар бағаншалар көлемін қосамыз:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i$$

Бұл өрнек $f(x, y)$ функциясының **(D)** облысы бойынша **Риман интегралдық қосындысы** деп аталады.

§ 14.4. Екі еселі интегралдың анықтамасы

Анықтама (Фихтенгольц): Бөлшектеу қадамы $\lambda = max\ d_i \to 0$ ұмтылғанда интегралдық қосындының M_i таңдауына тәуелсіз ақырлы шегі **f(x, y) функциясының D облысы бойынша екі еселі интегралы** деп аталады:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i$$

§ 14.5. Екі еселі Дарбу қосындылары

Егер $m_i = inf_{\Delta D_i} f(x,y)$ және $M_i = sup_{\Delta D_i} f(x,y)$ болса:

Төменгі Дарбу қосындысы: $s_T = \sum m_i \, \Delta S_i$

Жоғарғы Дарбу қосындысы: $S_T = \sum M_i \, \Delta S_i$

Кез келген бөлшектеу мен M_i таңдауы үшін: $\mathbf{s_T \le \sigma_n \le S_T}$.

§ 14.6. Жоғарғы және төменгі интегралдар

Төменгі екі еселі интеграл: $I_{төмен} = sup_T s_T$

Жоғарғы екі еселі интеграл: $I^{жоғар} = inf_T S_T$

Екі еселі интеграл бар болуы үшін $\mathbf{I_{төмен} = I^{жоғар}}$ болуы қажетті әрі жеткілікті.

§ 14.7. Дарбудың интегралдану критерийі

Дарбу Критерийі:

Шенелген $f(x, y)$ функциясы (D) облысында екі еселі интегралдануы үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санына сай мына шарты қанағаттандыратын T бөлшектеуі табылуы қажетті әрі жеткілікті:

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta S_i < \varepsilon$$

Мұндағы $\omega_i = M_i - m_i$ – функцияның ΔD_i ұяшығындағы тербелісі.

§ 14.8. 1-теорема: Үзіліссіз функциялар үшін

Негізгі Теорема:

Егер $f(x, y)$ функциясы туйық шенелген квадрирленетін **(D)** облысында **үзіліссіз** болса, онда ол осы облыста **интегралданады**.

Себебі: Кантор теоремасы бойынша тұйық шенелген облыста үзіліссіз функция бірқалыпты үзіліссіз болады, сондықтан ω_i тербелісін мейлінше кіші етуге болады.

§ 14.9. 2-теорема: Үзіліс сызықтары бар функциялар

Теорема:

Шенелген $f(x, y)$ функциясының үзіліс нүктелері нөлдік ауданы бар ақырлы санды тегіс немесе бөліктей-тегіс сызықтардың үстінде орналасса, онда ол **(D)** облысында **интегралданады**.

§ 14.10. Сызықтықтық және аддитивтілік қасиеттері

1. **Сызықтықтық:** $\iint_D (c_1 f + c_2 g)\,dx\,dy = c_1 \iint_D f\,dx\,dy + c_2 \iint_D g\,dx\,dy$

2. **Аддитивтілік:** Егер $D = D_1 \cup D_2$ болып, D_1 мен D_2 ішкі нүктелерімен қиылыспаса:

$$\iint_D f\,dx\,dy = \iint_{D_1} f\,dx\,dy + \iint_{D_2} f\,dx\,dy$$

§ 14.11. Орта мән теоремасы

Орта мән теоремасы:

Егер $f(x, y)$ байланысты (D) облысында үзіліссіз болса, онда сондай бір $M_0(\xi, \eta) \in D$ нүктесі табылып, мына теңдік орындалады:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi, \eta) \cdot S_D$$

Мұндағы S_D – (D) облысының ауданы.

§ 14.12. Геометриялық және физикалық мағынасы

1. **Аудан:** Егер $f(x, y) = 1$ болса, $\iint_D dx\,dy = S_D$ (D облысының ауданы).

2. **Көлем:** Егер $f(x, y) \geq 0$ болса, $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = V$ (цилиндрлік дене көлемі).

3. **Масса:** Егер $\rho(x, y)$ – жазық пластинаның беттік тығыздығы болса, $\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy = m$ (пластина массасы).

§ 14.13. Екі еселі интегралды модуль бойынша бағалау

Кез келген интегралданатын $f(x, y)$ үшін модуль таңбасы интеграл ішіне өтеді:

$$\left| \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \right| \le \iint_D |f(x,y)|\, dx\, dy$$

Егер $m \le f(x,y) \le M$ болса, онда $\mathbf{m\, S_D \le \iint_D f\, dx\, dy \le M\, S_D}$.

§ 14.14. Орта мәнді есептеуге типтік мысал

Мысал: D: $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$ тіктөртбұрышы бойынша $I = \iint_D (x + y)\,dx\,dy$ интегралының орташа мәнін табыңыз.

Шешуі: D облысының ауданы $S_D = 2 \cdot 3 = 6$.

Интеграл мәні $I = 15$ болады. Олай болса орташа мәні:

$f(\xi, \eta) =$

$\underline{I}S_D = \frac{15}{6} = 2.5.$

§ 14.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: Екі еселі интеграл жазық облысты бөлшектеу арқылы анықталады; үзіліссіз функциялар үшін ол әрқашан бар болады және цилиндрлік денелердің көлемі мен пластина массасын береді.

СӨЖ тапсырмалары:

1. Дарбу критерийін пайдаланып, тұрақты $f(x,y) = C$ функциясының екі еселі интегралданатынын дәлелдеңіз.
2. $x^2 + y^2 \le R^2$ дөңгелегінде $f(x, y) = x^2 + y^2$ үшін орта мән теоремасындағы орташа мәнді табыңыз.