ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

2-ДӘРІС

ЕКІНШІ ТЕКТІ ҚИСЫҚСЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДАР

Анықтамасы, физикалық мағынасы, қасиеттері және Грин формуласы

§ 2.1. Физикалық есеп: Күш өрісінің жұмысы

Есеп шарты: Материалдық нүкте $\mathbf{F(M) = P(x,y)i + Q(x,y)j}$ өгермелі күш өрісінің әсерінен **AB** бағытталған қисығы бойымен орын ауыстырады.

Мақсат: Күш өрісінің **W** атқаратын толық жұмысын табу.

Жұмыс вектордың бағыты мен жүріп өткен жолдың бағытына тікелей тәуелді.

§ 2.2. Элементар жұмысты жуықтау

1. Қисықты бөлу: AB доғасын бағыт бойынша $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ нүктелеріне бөлеміз.

2. Проекциялар: Элементар орын ауыстыру векторы $\Delta r_i = (\Delta x_i, \Delta y_i)$.

3. Элементар жұмыс: $\Delta W_i \approx P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$

§ 2.3. Екінші текті интегралдық қосынды

Барлық элементар жұмыстарды қосу арқылы векторлық өрістің интегралдық қосындысын аламыз:

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} [\, P(\xi_i, \eta_i)\, \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\, \Delta y_i \,]$$

Мұндағы $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ және $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ (таңбасы ескеріледі).

§ 2.4. Екінші текті интеграл анықтамасы

Анықтама: Бөлшектеу қадамы нөлге ұмтылғандағы интегралдық қосындының ақырлы шегі **екінші текті қисықсызықты интеграл** деп аталады:

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{\lambda \to 0} W_n$$

§ 2.5. Бағытқа тәуелділік қасиеті

Негізгі ерекшелік:

Интегралдау бағыты қарама-қарсы бағытқа өзгергенде, екінші текті қисықсызықты интегралдың **таңбасы қарама-қарсыға өзгереді**:

$$\int_{BA} P\,dx + Q\,dy = -\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$$

§ 2.6. Параметрлік түрде берілгенде есептеу

Қисық $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ теңдеуімен $A(t = \alpha)$ нүктесінен $B(t = \beta)$ нүктесіне дейін берілсе:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t) \right] dt$$

Мұнда $\alpha < \beta$ болуы міндетті емес, шектер бағытқа сай қойылады.

§ 2.7. Айқын түрде берілгенде есептеу

Егер AB қисығы $y = y(x)$ теңдеуімен беріліп, x өсімшесі a-дан b-ға дейін өзгерсе $(dy = y'(x)dx)$:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x) \right] dx$$

§ 2.8. 1-ші және 2-ші текті интегралдар байланысы

Егер $\cos\alpha$ мен $\cos\beta$ – қисыққа жүргізілген жанаманың бағыттаушы косинустары болса, онда:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,ds$$

§ 2.9. Тұйық контур бойынша интеграл

Тұйық **L** контуры бойынша интеграл арнайы белгімен жазылады:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy$$

Оң бағыт: Контур бойымен қозғалғанда облыс әрқашан **сол жақта** қалатын бағыт (сағат тіліне қарсы).

§ 2.10. Грин формуласы

Грин Теоремасы:

Егер D облысында $P(x,y)$, $Q(x,y)$ және олардың дербес туындылары үзіліссіз болса, онда контур бойынша интеграл екі еселі интегралға ауысады:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

§ 2.11. Фигураның ауданын табу формулалары

Грин формуласында $P = -y$, $Q = x$ деп алсақ, **S** ауданын есептейтін өрнек шығады:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L (x\,dy - y\,dx)$$

§ 2.12. Интегралдың жолға тәуелсіздік шарттары

Төмендегі төрт шарт бір-біріне пара-пар (эквивалентті):

1. Кез келген тұйық контур үшін: $\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0$

2. Интеграл тек бастапқы мен соңғы нүктеге тәуелді.

3. $P\,dx + Q\,dy = dU$ (Толық дифференциал).

4. $\underline{\partial Q}\partial x = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}}$ орындалады.

§ 2.13. Потенциалдық функцияны қалпына келтіру

Толық дифференциал шарты орындалса, $U(x, y)$ функциясы келесі интеграл арқылы табылады:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\, dt + C$$

§ 2.14. Типтік мысал есеп

Мысал: *(0,0)*-ден *(1,1)* нүктесіне дейінгі $y = x$ кесіндісі бойымен $\int (x^2\,dy + y^2\,dx)$ интегралын есептеңіз.

Шешуі: $y = x$ болғандықтан $dy = dx$.

$$I = \int_0^1 (x^2 + x^2)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx =$$

$$\frac{2}{3}$$

§ 2.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: Екінші текті қисықсызықты интеграл векторлық өрістің жұмысын өрнектейді, бағытқа тәуелді және Грин формуласы арқылы екі еселі интегралға келтіріледі.

СӨЖ тапсырмалары:

1. Грин формуласы арқылы эллипстің $S = \pi ab$ ауданын есептеңіз.
2. Өрістің потенциалды екенін тексеріп, оның $U(x, y)$ функциясын табыңыз.