ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

4-ДӘРІС

ҮШ ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАР

Анықтамасы, есептеу әдістері, цилиндрлік және сфералық координаттар

§ 4.1. Физикалық есеп: Көлемдік дененің массасы

Есеп шарты: Кеңістіктегі **V** шенелген облысында көлемдік тығыздығы **f(x, y, z)** болатын әркелкі дене берілген.

Мақсат: Осы дененің толық **m** массасын есептеу.

Денені элементар көлемдік параллелепипедтерге немесе облыстарға бөлшектеу арқылы массаны есептейміз.

§ 4.2. Көлемдік бөлшектеу алгоритмі

1. Бөлу: V облысын $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ элементар көлемдерге бөлеміз.

2. Таңдау: Әрбір ΔV_i ішінен еркін $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ нүктесін таңдаймыз.

3. Элементар масса: $\Delta m_i \approx f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta V_i$

§ 4.3. Үш еселі интегралдық қосынды

Барлық элементар бөлшектердің массаларын қосу арқылы **Риманның үш еселі интегралдық қосындысын** аламыз:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta V_i$$

Мұндағы $d_i - \Delta V_i$ элементар көлемінің максимал диаметрі.

§ 4.4. Үш еселі интеграл анықтамасы

Анықтама: Бөлшектеу диаметрі $\lambda = max\ d_i \to 0$ ұмтылғанда интегралдық қосындының ақырлы шегі **үш еселі интеграл** деп аталады:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta V_i$$

§ 4.5. Бар болуы және қасиеттері

Теорема және қасиеттер:

1. Егер $f(x, y, z)$ туйық шенелген V облысында **үзіліссіз** болса, онда интеграл бар болады.

2. Сызықтықтық, аддитивтілік және орта мән теоремалары сақталады.

§ 4.6. Декарттық координаттарда есептеу

Егер V облысы $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$ шекараларымен берілсе:

$$\iiint_V f\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

§ 4.7. Айнымалыларды ауыстыру және Якобиан

$x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ түрлендіруі үшін Якобиан:

$$J = \frac{\mathbf{D(x, y, z)}}{\mathbf{D(u, v, w)}}$$

Көлем элементі: $\mathbf{dx\ dy\ dz = |J|\ du\ dv\ dw}$

§ 4.8. Цилиндрлік координаттар жүйесі

Түрлендіру: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$

Якобиан: $\mathbf{J = r}$. Олай болса $\mathbf{dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz}$.

$$\iiint_V f\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

§ 4.9. Сфералық координаттар жүйесі

Түрлендіру: $x = \rho \sin\varphi \cos\theta,\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta,\ z = \rho \cos\varphi$

Якобиан: $\mathbf{J = \rho^2 \sin\varphi}$

Көлем элементі: $\mathbf{dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi}$

§ 4.10. Сфералық жүйеде есептеу өрнегі

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

Бұл жүйе сфера, конус, параболоид тәрізді денелерде тиімді.

§ 4.11. Дененің көлемін табу

Геометриялық мағынасы: Егер $f(x, y, z) = 1$ болса, онда үш еселі интеграл V дененің **көлемін** береді:

$$V = \iiint_V dx\, dy\, dz$$

§ 4.12. Физикалық сипаттамалар

Егер $\rho(x, y, z)$ – көлемдік тығыздық болса:

Масса: $m = \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz$

Oz осіне қатысты инерция моменті: $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \, \rho \, dx \, dy \, dz$

§ 4.13. Дененің ауырлық центрі

Дененің ауырлық центрінің $C(x_c, y_c, z_c)$ координаттары:

$$x_c = \frac{\iiint x\,\rho\,dV}{m},\ y_c = \frac{\iiint y\,\rho\,dV}{m},\ z_c = \frac{\iiint z\,\rho\,dV}{m}$$

§ 4.14. Типтік мысал есеп

Мысал: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ шардың көлемін сфералық координаттармен табыңыз.

Шешуі: $V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{R} \rho^2 \, d\rho = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$

§ 4.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: Үш еселі интеграл кеңістіктік денелердің көлемі мен макро-физикалық параметрлерін анықтайды; цилиндрлік және сфералық координаттар есептеуді едәуір жеңілдетеді.

СӨЖ тапсырмалары:

1. Цилиндрлік координаттар арқылы $x^2 + y^2 = R^2$ және $z = 0$, $z = H$ дененің инерция моментін табыңыз.
2. Жартлай шардың ауырлық центрін есептеңіз.