ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

10-ДӘРІС

СТИЛЬТЕС ИНТЕГРАЛЫ: АНЫҚТАМАСЫ ЖӘНЕ БАР БОЛУ ШАРТТАРЫ

Г. М. Фихтенгольц курсы • 15-тарау (§ 7–8)

§ 10.1. Риман интегралын жалпылау идеясы

Мақсат: Риман интегралындағы $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ өсімшесін монотонды немесе шекті вариациялы $g(x)$ функциясының $\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$ өсімшесіне ауыстыру.

Бұл идея үзілісті салмақтар мен дискреттік-үзіліссіз массаларды біртұтас аппаратпен есептеуге мүмкіндік береді.

§ 10.2. Стилтьестің интегралдық қосындысы

$[a, b]$ сегментін $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ нүктелерімен бөлшектеп, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ таңдаймыз:

$$\sigma_T = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta g_i$$

Мұнда $f(x)$ – **интегралданатын функция**, ал $g(x)$ – **интегратор** деп аталады.

§ 10.3. Риман-Стилтьес интегралының анықтамасы

Анықтама: Бөлшектеу қадамы $\lambda = max\ \Delta x_i \to 0$ ұмтылғанда σ_T қосындысының ξ_i таңдауына тәуелсіз ақырлы шегі **f-тің g бойынша Риман-Стилтьес интегралы** деп аталады:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta g_i$$

§ 10.4. Дарбу-Стилтьес қосындылары

Егер $g(x)$ **өспелі (монотонды)** функция болып, $m_i = inf\, f(x)$, $M_i = sup\, f(x)$ болса:

Төменгі Дарбу-Стилтьес қосындысы: $s_T = \sum m_i \, \Delta g_i$

Жоғарғы Дарбу-Стилтьес қосындысы: $S_T = \sum M_i \, \Delta g_i$

Кез келген бөлшектеу мен ξ_i үшін: $\mathbf{s_T \le \sigma_T \le S_T}$.

§ 10.5. Жоғарғы және төменгі Стилтьес интегралдары

Төменгі интеграл: $I_{төмен} = sup_T s_T$

Жоғарғы интеграл: $I^{жоғар} = inf_T S_T$

Интеграл бар болуы үшін $\mathbf{I_{төмен} = I^{жоғар}}$ теңдігі орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

§ 10.6. Дарбу интегралдану критерийі

Дарбу Критерийі:

Монотонды $g(x)$ интеграторы үшін $f(x)$ функциясы Стилтьес мағынасында интегралдануы үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санына сай мына теңсіздік орындалатындай T бөлшектеуі табылуы қажетті әрі жеткілікті:

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \Delta g_i < \varepsilon$$

Мұндағы $\omega_i = M_i - m_i$ – f функциясының $[x_{i-1}, x_i]$ аралығындағы тербелісі.

§ 10.7. 1-теорема: f үзіліссіз болғанда бар болуы

Бар болу теоремасы:

Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде **үзіліссіз**, ал $g(x)$ монотонды (немесе шекті вариациялы) болса, онда $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ Стилтьес интегралы **міндетті түрде бар болады**.

§ 10.8. 2-теорема: f монотонды және g үзіліссіз болғанда

Теорема:

Егер $f(x)$ [a, b] кесіндісінде **монотонды**, ал $g(x)$ **үзіліссіз әрі монотонды** болса, онда Стилтьес интегралы бар болады.

Маңызды ескерту: f пен g функцияларының ортақ үзіліс нүктесі **болмауы тиіс**.

§ 10.9. Ортақ үзіліс нүктелерінің тыйымы

Егер $f(x)$ мен $g(x)$ функцияларының бір $c \in [a, b]$ нүктесінде **бір мезгілде бір жақты үзілісі (бір жақтан секірісі)** бар болса, онда Стилтьес интегралы **өмір сүрмейді (бар болмайды)**.

Сонымен, Стилтьес интегралы бар болуы үшін f пен g-нің үзіліс нүктелер жиындары қиылыспауы қажет.

§ 10.10. Шекті вариациялы интеграторға көшу

Жордан теоремасы бойынша кез келген шекті вариациялы $g(x) = \pi(x) - v(x)$ өспелі функциялар айырымы ретінде жазылады:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,d\pi(x) - \int_a^b f(x)\,dv(x)$$

Осылайша, интегратордың шекті вариациялы болуы монотонды жағдайға толығымен келтіріледі.

§ 10.11. Сатылы (салмақты) интегратор жағдайы

Егер $g(x)$ функциясы $c \in (a, b)$ нүктесінде h секірісі бар сатылы функция болса (басқа жерде тұрақты):

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = f(c) \cdot h$$

Бұл формула интегралдың дискретті қосындыларға ауысу мүмкіндігін көрсетеді.

§ 10.12. Интеграл шегінің жалғыздығы

Егер Стилтьес интегралы бар болса, онда оның I мәні жалғыз болады және ол $[a, b]$ кесіндісін бөлшектеу тәсіліне де, ξ_i нүктелерін таңдауға да **тәуелсіз**.

§ 10.13. Стилтьес интегралын модуль бойынша бағалау

Егер $|f(x)| \le M$ болып, $g(x)$ шекті вариациялы функция болса:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dg(x) \right| \le M \cdot V_a^b(g)$$

Бұл бағалау Риман интегралындағы $M(b - a)$ бағалауының тура жалпылamасы болып табылады.

§ 10.14. Типтік мысал есеп

Мысал: $f(x) = x^2$ және $g(x) = [x]$ (бүтін бөлік) болғанда $\int_0^3 x^2\, d[x]$ интегралын есептеңіз.

Шешуі: $[x]$ функциясы $x = 1, 2, 3$ нүктелерінде $h = 1$ секіріске ие.

$$\int_0^3 x^2\, d[x] = 1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 = 1 + 4 + 9 = 14.$$

§ 10.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: Риман-Стилтьес интегралы интегратор функцияның өсімшесіне негізделіп анықталады; f үзіліссіз және g шекті вариациялы болғанда интегралдың бар болуы толық камтамасыз етіледі.

СӨЖ тапсырмалары:

1. $f(x) = e^x$ және $g(x) = H(x - 1)$ (Хевисайд функциясы) үшін $\int_0^2 e^x \, dH(x - 1)$ интегралын есептеңіз.
2. Дарбу критерийін пайдаланып, үзіліссіз f функциясының монотонды g бойынша интегралданатынын дәлелдеңіз.