ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

12-ДӘРІС

СТИЛЬТЕС ИНТЕГРАЛЫН РИМАН ИНТЕГРАЛЫНА КЕЛТІРУ

Г. М. Фихтенгольц курсы • 15-тарау (§ 10–11)

§ 12.1. Есептеу мәселесінің қойылымы

Негізгі сұрақ: Риман-Стилтьес интегралын тікелей интегралдық қосындылардың шегі ретінде есептеу күрделі. Оны кәдімгі **Риман анықталған интегралына** қалай келтіруге болады?

Бұл мәселе интегратор $g(x)$ функциясының дифференциалдану қасиетіне тікелей байланысты.

§ 12.2. Негізгі келтіру теоремасы

Теорема (Фихтенгольц):

Егер $f(x)$ [a, b] кесіндісінде үзіліссіз болып, ал $g(x)$ функциясының үзіліссіз $g'(x)$ туындысы бар болса, онда Стилтьес интегралы Риман интегралына түрленеді:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

§ 12.3. Келтіру теоремасының дәлелдеуі

Дәлелдеу идеясы: Лагранж теоремасы бойынша $\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(c_i)\,\Delta x_i$, мұндағы $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Олай болса, Стилтьес қосындысы: $\sum f(\xi_i)\,\Delta g_i = \sum f(\xi_i)\,g'(c_i)\,\Delta x_i$.

$\lambda \to 0$ ұмтылғанда бұл қосынды Риман интегралы $\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$ мәніне ұмтылады.

§ 12.4. Бөліктей дифференциалданатын интегратор

Егер $g(x)$ үзіліссіз болып, тек ақырлы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ нүктелерінде туындысы болмаса:

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Бұл кезде интеграл ішіндегі туынды ақырлы нүктелерде өзгергенімен, Риман интегралының мәні өзгермейді.

§ 12.5. Таза сатылы (секірмелі) интегратор

Егер $g(x)$ функциясы $c_1, c_2, \ldots, c_m$ нүктелерінде $h_1, h_2, \ldots, h_m$ секірістері бар сатылы функция болса (туындысы ақырлы интервалдарда 0):

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\,h_k$$

§ 12.6. Аралас типті интегратор

Егер $g(x) = g_{негізгі}(x) + g_{сатылы}(x)$ болып, үзіліссіз бөлік пен секірістерден тұрса:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'_{негізгі}(x)\,dx + \sum f(c_k)\,h_k$$

§ 12.7. Стилтьес интегралында айнымалыны ауыстыру

Егер $x = \varphi(t)$ теңдеуі $[\alpha, \beta]$ кесіндісін $[a, b]$ кесіндісіне монотонды бейнелесе:

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, d[g(\varphi(t))]$$

§ 12.8. Ньютон-Лейбниц типті аналог

Егер $F(x)$ функциясы $dF(x) = f(x)\,dg(x)$ шартын қанағаттандырса:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = F(b) - F(a)$$

Бұл формула Стилтьес мағынасындағы алғашқы функция түсінігін қалыптастырады.

§ 12.9. Есептеу стратегиясының алгоритмі

1-қадам: Интегратор $g(x)$ функциясының үзіліс нүктелерін табу.

2-қадам: $g(x)$-ді тегіс бөлігі мен сатылы бөлігіне ажырату.

3-қадам: Тегіс бөлігін $\int f(x)\,g'(x)\,dx$ Риман интегралымен есептеу.

4-қадам: Секіріс нүктелеріндегі $\sum f(c_k)\,h_k$ мәндерін қосу.

§ 12.10. Ықтималдықтар теориясына қолданылуы

Егер $F(x)$ – кездейсоқ шаманың таралу функциясы болса, онда оның математикалық күтімі $\mathbf{E[X]}$ Стилтьес интегралымен жазылады:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)$$

Бұл формула үзіліссіз де, дискретті де кездейсоқ шамалар үшін жалпы болып табылады.

§ 12.11. 1-мысал: Тегіс интегратор

Есеп: $\int_0^2 x^3\, d(x^2)$ интегралын есептеңіз.

Шешуі: $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$. Келтіру формуласы бойынша:

$$\int_0^2 x^3\, d(x^2) = \int_0^2 x^3 \cdot (2x)\, dx = 2\int_0^2 x^4\, dx = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{64}{5} = 12.8.$$

§ 12.12. 2-мысал: Секірмелі интегратор

Есеп: $\int_0^4 (x + 1)\, d([x])$ интегралын есептеңіз.

Шешуі: Бүтін бөлік $[x]$ функциясы $x = 1, 2, 3, 4$ нүктелерінде $h = 1$ секірістерге ие:

$$I = (1+1)\cdot 1 + (2+1)\cdot 1 + (3+1)\cdot 1 + (4+1)\cdot 1 = 2 + 3 + 4 + 5 = 14.$$

§ 12.13. 3-мысал: Аралас интегратор

Есеп: $g(x) = x + [x]$ болғанда $\int_0^2 x\, d(x + [x])$ есептеңіз.

Шешуі: Интегралды екіге ажыратамыз:

$$I = \int_0^2 x\,dx + \int_0^2 x\,d[x] = [$$

$$\underline{x^2}2\ ]_0^2 + (1\cdot 1 + 2\cdot 1) = 2 + 3 = 5.$$

§ 12.14. Есептеудегі типтік қателіктер

> **Қателік:** *Интегратор үзілісті болғанда $dg = g'(x)dx$ формулайын соқыр қолданып, сатылы бөлігін ескерусіз қалдыру.*
>
> **Ереже:** *Үзіліс нүктелеріндегі секірістер міндетті түрде бөлек қосылады!*

§ 12.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: *Стилтьес интегралын есептеу g(x) функциясының дифференциалданатын бөлігін Риман интегралына келтіру және оның секірістерін жеке қосынды ретінде есептеу арқылы жүзеге асырылады.*

СӨЖ тапсырмалары:

1. $\int_0^{\pi} x\, d(\sin x)$ интегралын Риман интегралына келтіріп есептеңіз.

2. $g(x) = 2x + [x]$ үшін $\int_0^{3} x^2\, dg(x)$ мәнін табыңыз.