ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

15-ДӘРІС

ЕКІ ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДЫ ҚАЙТАЛАНБАЛЫ ИНТЕГРАЛҒА КЕЛТІРУ

Г. М. Фихтенгольц курсы • 16-тарау (§ 3–4)

§ 15.1. Тіктөртбұрыштағы Фубини теоремасы

Фубини Теоремасы:

Егер $f(x, y)$ функциясы $D = [a, b] \times [c, d]$ тіктөртбұрышында үзіліссіз болса, онда екі еселі интеграл екі бір еселі интегралды тізбектеп есептеуге (қайталанбалы интегралға) тең болады:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

§ 15.2. Оу осі бағытында дұрыс (у-дұрыс) облыстар

у-дұрыс облыс: Кез келген $x = c \in (a, b)$ вертикаль түзуі **(D)** облысының шекарасын **екі-ақ нүктеде** қиып өтетін облыс.

Оның теңсіздіктер жүйесі: $\mathbf{a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)}$.

§ 15.3. y-дұрыс облыста есептеу формуласы

Егер D облысы *y-дұрыс* болып, *f(x, y)* онда үзіліссіз болса:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Ішкі интегралда *x* айнымалысы тұрақты (параметр) деп есептеледі.

§ 15.4. Ox осі бағытында дұрыс (x-дұрыс) облыстар

x-дұрыс облыс: Кез келген $y = d \in (c, d)$ горизонталь түзуі **(D)** облысының шекарасын екі-ақ нүктеде қиып өтетін облыс.

Оның теңсіздіктер жүйесі: $\mathbf{c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)}$.

§ 15.5. x-дұрыс облыста есептеу формуласы

Егер D облысы *x-дұрыс* болып, *f(x, y)* онда үзіліссіз болса:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

Ішкі интегралда *y* айнымалысы тұрақты деп есептеледі.

§ 15.6. Интегралдау ретін ауыстыру

Егер D облысы әрі y-дұрыс, әрі x-дұрыс болса, екі қайталанбалы интеграл бір-біріне дәл тең болады:

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dx$$

Интегралдау ретін ауыстыру кейбір интегралдарды есептеуді едәуір жеңілдетеді.

§ 15.7. Күрделі облыстарды дұрыс бөліктерге жіктеу

Егер D облысы дұрыс болмаса, оны сызықтармен дұрыс болып табылатын $D_1, D_2, \ldots, D_k$ ішкі облыстарына бөлеміз.

Аддитивтілік қасиеті бойынша: $\iint_D f\,dS = \sum \iint_{D_i} f\,dS$.

§ 15.8. Полярлық координаттар жүйесіне өту

Формулалар: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$. Түрлендіру Якобианы $\mathbf{I} = \mathbf{r}$.

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

§ 15.9. Полярлық жүйеде қайталанбалы интеграл

Егер D' облысы $\alpha \le \theta \le \beta$, $r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$ теңсіздіктерімен берілсе:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr$$

§ 15.10. Жалпы қисықсызықты координаттар

$x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ алмастыруы үшін Якобиан $\mathbf{I} = \underline{\mathbf{D(\varphi, \psi)}}\mathbf{D(u, v)} \neq \mathbf{0}$ болса:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))\,|I|\,du\,dv$$

§ 15.11. 1-мысал: Декарттық қайталанбалы интеграл

Есеп: D: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$ үшбұрышы бойынша $I = \iint_D x\,y\,dx\,dy$ есептеңіз.

Шешуі: $I = \int_0^1 x\,dx \int_0^x y\,dy = \int_0^1 x\,[$

$y^2 2\,]_0^x\,dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = [\,\frac{x^4}{8}\,]_0^1 = \frac{1}{8}.$

§ 15.12. 2-мысал: Интегралдау ретін ауыстыру

Есеп: $I = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2}\,dx$ ретін ауыстырып есептеңіз.

Шешуі: D облысы: $0 \le y \le 1,\ y \le x \le 1$, яғни $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$.

$$I = \int_0^1 e^{x^2}\,dx \int_0^x dy = \int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx = [$$

$$\underline{e^{x^2}2}\ ]_0^1 = \frac{\mathrm{e} - 1}{2}.$$

§ 15.13. 3-мысал: Полярлық координаттармен есептеу

Есеп: D: $x^2 + y^2 \le R^2$ дөңгелегі бойынша $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$ есептеңіз.

Шешуі: Полярлық координаттарда $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le R$:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

§ 15.14. 15 дәрістің логикалық қорытындысы

1. Қисықсызықты интегралдар (1-2 дәріс) ➔ Грин және Стилтьес теориясы (3-13 дәріс).

2. Екі еселі интеграл анықтамасынан (14-дәріс) қайталанбалы есептеу алгоритмдеріне (15-дәріс) дейінгі толық цикл аяқталды.

§ 15.15. Қорытынды және СӨЖ / Емтихан тапсырмалары

Дәрістің түйіні: Екі еселі интегралды есептеу оны Декарттық немесе полярлық координаттарда қайталанбалы бір еселі интегралдарға келтіру арқылы орындалады.

СӨЖ / Емтихан тапсырмалары:

1. $y = x^2$ және $y = 2x$ сызықтарымен шектелген облыс бойынша $\iint_D (x + 2y)\,dx\,dy$ есептеңіз.

2. Полярлық координаттарға өту арқылы $x^2 + y^2 \le 1$ дөңгелегінде $\iint e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ интегралын табыңыз.