ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

8-ДӘРІС

ЖОРДАН БОЙЫНША ШЕКТІ ӨЗГЕРІСТІ ФУНКЦИЯЛАР

Г. М. Фихтенгольц курсы • 15-тарау (§ 3-4)

§ 8.1. Сегментті бөлшектеу және толық вариация

[a, b] сегментін бөлшектеу: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Вариациялық қосынды: $V_T = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$

Бұл қосынды барлық мүмкін T бөлшектеулері үшін қарастырылады.

§ 8.2. Шекті вариациялы функция анықтамасы

Жордан Анықтамасы:

Егер барлық T бөлшектеулері бойынша V_T қосындыларының жиыны жоғарыдан шенелген болса, онда $f(x)$ функциясы **[a, b] сегментінде шекті вариациялы (өзгерісті)** деп аталады.

$$V_a^b(f) = \sup_T \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < +\infty$$

§ 8.3. Монотонды функциялардың вариациясы

Теорема: [a, b] сегментінде монотонды кез келген функция шекті вариациялы болады.

Егер $f(x)$ кемімейтін болса, модульдер ашылып, аралық мүшелер жойылады:

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a)$$

§ 8.4. Жордан теоремасы

Жордан Теоремасы:

Функция *[a, b]* кесіндісінде шекті вариациялы болуы үшін оны **екі өспелі (кемімейтін) функцияның айырымы** ретінде өрнектеу қажетті әрі жеткілікті:

$$f(x) = \pi(x) - v(x)$$

Мұндағы $\pi(x)$ және $v(x)$ – өспелі функциялар.

§ 8.5. Вариацияның аддитивтілік қасиеті

Кез келген $c \in (a, b)$ нүктесі үшін толық вариация **аддитивті** болады:

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

§ 8.6. Алгебралық амалдар және вариация

Егер $f(x)$ және $g(x)$ [a, b]-де шекті вариациялы функциялар болса:

1. $C \cdot f(x)$ функциясы да шекті вариациялы: $V_a^b(Cf) = |C|\, V_a^b(f)$
2. $f(x) \pm g(x)$ қосындысы: $V_a^b(f \pm g) \le V_a^b(f) + V_a^b(g)$
3. Көбейтіндісі $f(x) \cdot g(x)$ де шекті вариациялы болады.

§ 8.7. Дифференциалданатын функциялар

Теорема:

Егер $f(x)$ функциясының [a, b] кесіндісінде үзіліссіз $f'(x)$ туындысы бар болса, онда ол шекті вариациялы болады және оның вариациясы мына формуламен табылады:

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|\,dx$$

§ 8.8. Липшиц шартын қанағаттандыратын функциялар

Егер кез келген $x', x'' \in [a, b]$ үшін $|f(x') - f(x'')| \le L\,|x' - x''|$ теңсіздігі орындалса (Липшиц шарты):

Онда $f(x)$ шекті вариациялы болады және $V_a^b(f) \le L\,(b - a)$.

§ 8.9. Ауыспалы жоғарғы шекті вариация функциясы

$v(x) = V_a^x(f)$ функциясын қарастырайық (v(a) = 0):

1. $v(x)$ – [a, b] кесіндісінде **кемімейтін** функция.
2. Егер $f(x)$ үзіліссіз болса, онда $v(x)$ вариациялық функциясы да **үзіліссіз** болады.

§ 8.10. Оң және теріс вариациялар

$p_i = max(f(x_i) - f(x_{i-1}), 0)$ және $q_i = max(f(x_{i-1}) - f(x_i), 0)$ деп алсақ:

Оң вариация: $P = \sup \sum p_i$

Теріс вариация: $N = \sup \sum q_i$

Бұдан: **$V = P + N$** және **$f(b) - f(a) = P - N$** өрнектері шығады.

§ 8.11. Шексіз вариациялы үзіліссіз функциялар

Классикалық контрмысал:

$f(x) = x \sin(\pi/x)$ ($x \neq 0$ кезінде), $f(0) = 0$ функциясы **[0, 1] кесіндісінде үзіліссіз**, бірақ оның толық вариациясы **шекті емес ($V = +\infty$)**.

§ 8.12. Шекті вариациялы функциялардың шенелгендігі

Теорема: Шекті вариациясы бар кез келген функция **шенелген** болады.

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b(f)$$

Бұл қасиет Стилтьес интегралының бар болу теоремаларында негізгі роль атқарады.

§ 8.13. Үзіліс нүктелерінің құрылымы

Фихтенгольц теоремасы: [a, b] кесіндісіндегі шекті вариациялы функцияның үзіліс нүктелері **тек 1-текті (секірісті)** болуы мүмкін.

Осындай үзіліс нүктелерінің жиыны ең көп дегенде **саналымды** болады.

§ 8.14. Типтік мысал есеп

Мысал: $f(x) = x^2$ функциясының $[0, 2]$ кесіндісіндегі толық вариациясын есептеңіз.

Шешуі: $f(x) = x^2$ функциясы $[0, 2]$ аралығында өспелі. Монотонды функция вариациясының формуласы бойынша:

$$V_0^2(f) = f(2) - f(0) = 2^2 - 0^2 = 4.$$

§ 8.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: Шекті өзгерісті функциялар екі өспелі функцияның айырымы ретінде өрнектеледі және олар Риман-Стилтьес интегралын анықтауда интегратор функция ретінде маңызды роль атқарады.

СӨЖ тапсырмалары:

1. $f(x) = \sin x$ функциясының $[0, 2\pi]$ кесіндісіндегі толық вариациясын $V = \int |f'(x)|\,dx$ формуласымен табыңыз.
2. Дәлелдеңіз: Егер f және g шекті вариациялы болса, $\max(f, g)$ да шекті вариациялы болады.