ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

# 7-ДӘРІС

# ТАРАТЫЛҒАН МАССАЛАР ЖӘНЕ ВАРИАЦИЯСЫ ШЕКТЕЛГЕН ФУНКЦИЯЛАР

Г. М. Фихтенгольц курсы • 15-тарау (§ 1–3)

# § 7.1. Түзудегі массаның таралу идеясы

**Физикалық негіздеме:** Түзу бойында үздіксіз (тығыздық арқылы) таратылған масса да, шоғырланған нүктелік массалар да болуы мүмкін.

$m(x)$ – $[a, x]$ кесіндісінде орналасқан жалпы массаны сипаттайтын функция болсын. Бұл функция **монотонды кемімейтін** болады.

# § 7.2. Функция вариациясының анықтамасы

$[a, b]$ кесіндісін $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ нүктелерімен бөлшектеп, абсолют өсімшелер қосындысын қарастырамыз:

$$V_T = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

**Толық вариация:** Кез келген $T$ бөлшектеуі бойынша алынған $V_T$ қосындыларының дәл жоғарғы шегі $f(x)$ функциясының **толық вариациясы** деп аталады:

$$\mathbf{V_a^b(f) = \sup_T V_T}$$

# § 7.3. Вариациясы шектелген функциялар класы

**Анықтама:** Егер $V_a^b(f) < +\infty$ (ақырлы) болса, онда $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде **вариациясы шектелген функция** (немесе шенелген вариациялы функция) деп аталады.

Бұл класс $V[a, b]$ деп белгіленеді.

# § 7.4. Монотонды функциялардың вариациясы

***Теорема:***

Кез келген *[a, b]* кесіндісіндегі монотонды функция вариациясы шектелген болады. Егер *f(x)* монотонды өспелі болса:

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a)$$

# § 7.5. Вариацияның аддитивтілік қасиеті

***Теорема (Аддитивтілік):***

Кез келген $c \in (a, b)$ нүктесі үшін $[a, b]$ кесіндісіндегі толық вариация ішкі кесінділердегі вариациялардың қосындысына тең:

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

# § 7.6. Жордан жіктелу теоремасы

***Жордан Теоремасы:***

*f(x)* функциясы *[a, b]* кесіндісінде вариациясы шектелген болуы үшін ол **екі монотонды кемімейтін функцияның айырымы** ретінде жазылуы қажетті әрі жеткілікті:

$$f(x) = \pi(x) - v(x)$$

Мұндағы $\pi(x) =$

$$\frac{V_a^x(f) + f(x)}{2}$$

,

$$v(x) = \frac{V_a^x(f) - f(x)}{2}$$

# § 7.7. Дифференциалданатын функциялардың вариациясы

Егер $f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісінде шенелген немесе үзіліссіз $f'(x)$ туындысы бар болса, онда оның толық вариациясы мына Риман интегралына тең:

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|\,dx$$

# § 7.8. Вариациясы шектелген функциялардың қасиеттері

1. Егер $f, g \in V[a, b]$ болса, онда $\mathbf{(f \pm g) \in V[a, b]}$.

2. Көбейтінді $\mathbf{(f \cdot g) \in V[a, b]}$.

3. Егер $|g(x)| \geq c > 0$ болса, онда қатынасы $\frac{f}{g} \in \mathbf{V[a, b]}$.

# § 7.9. Вариациясы шектелген функцияның үзілістері

***Үзілістер құрылысы:***

Вариациясы шектелген функцияның тек **1-текті үзіліс нүктелері (секірістері)** ғана болуы мүмкін. Ондай үзіліс нүктелерінің жиыны **саналымдыдан артық емес**.

# § 7.10. Вариациялық функцияның үзіліссіздігі

$v(x) = V_a^x(f)$ функциясын **ауыспалы вариациялық функция** деп атаймыз.

Егер $f(x)$ функциясы $x_0$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда $v(x)$ функциясы да $x_0$ нүктесінде **үзіліссіз** болады.

# § 7.11. Үзіліссіздік пен шенелген вариация арақатынасы

**Ескерту:** Функцияның үзіліссіз болуы оның вариациясының шектелген болуына кепілдік бермейді!

**Қарсы мысал:** $f(x) = x \sin(1/x)$ ($x \neq 0$) және $f(0) = 0$ функциясы $[0, 1]$ кесіндісінде үзіліссіз, бірақ $\mathbf{V_0^1(f) = +\infty}$.

# § 7.12. 1-мысал: Вариацияны есептеу

**Есеп:** $f(x) = x^2 - 2x$ функциясының $[0, 3]$ кесіндісіндегі толық вариациясын табыңыз.

**Шешуі:** $f'(x) = 2x - 2$. Экстремум нүктесі $x = 1$. $[0, 1]$ аралығында кемиді, $[1, 3]$ аралығында өседі.

$$V_0^3(f) = V_0^1(f) + V_1^3(f) = |f(1) - f(0)| + |f(3) - f(1)| = |-1 - 0| + |3 - (-1)| = 1 + 4 = 5.$$

# § 7.13. 2-мысал: Интегралдық формуламен вариация табу

**Есеп:** $f(x) = \sin x$ функциясының $[0, 2\pi]$ аралығындағы вариациясын табыңыз.

**Шешуі:** $f'(x) = \cos x$ үзіліссіз. Интегралдық формуланы қолданамыз:

$$V_0^{2\pi}(\sin x) = \int_0^{2\pi} |\cos x|\, dx = 4\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 4\,[\sin x]_0^{\pi/2} = 4.$$

# § 7.14. Стилтьес интегралындағы рөлі

Вариациясы шектелген функциялар Стилтьес интегралында **интегратор g(x)** рөлін атқаратын негізгі функциялар класы болып табылады.

Жордан жіктелуі арқылы кез келген шекті вариациялы интегратор бойынша интегралды екі монотонды интегратор бойынша интегралдар айырымына келтіруге болады.

# § 7.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

**Дәрістің түйіні:** Вариациясы шектелген функциялар екі монотонды функцияның айырымына жіктеледі және олардың тек 1-текті секіріс үзілістері ғана болуы мүмкін.

**СӨЖ тапсырмалары:**

1. $f(x) = x^3 - 3x$ функциясының $[-2, 2]$ кесіндісіндегі толық вариациясын табыңыз.
2. $f(x) = [x]$ (бүтін бөлік) функциясының $[0, 4]$ кесіндісіндегі толық вариациясын есептеңіз.