ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

3-ДӘРІС

ЕКІ ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАР

Анықтамасы, қасиеттері, қайталанбалы интегралдар және полярлық координаттар

§ 3.1. Геометриялық есеп: Цилиндрлік дененің көлемі

Есеп шарты: Төменнен Oxy жазықтығындағы **D** туйық облысымен, жоғарыдан $z = f(x, y) \geq 0$ үзіліссіз бетімен шектелген цилиндрлік дене берілген.

Мақсат: Осы дененің толық **V** көлемін табу.

Функция үзіліссіз болғандықтан, D облысын ұсақ элементар торларға бөлу арқылы көлемді есептейміз.

§ 3.2. Облысты бөлшектеу алгоритмі

1. Бөлу: D облысын торлар арқылы $\Delta D_1, \Delta D_2, \ldots, \Delta D_n$ элементар облыстарға бөлеміз. Олардың аудандары ΔS_i болсын.

2. Тандау: Әрбір ΔD_i ішінен еркін $M_i(\xi_i, \eta_i)$ нүктесін таңдаймыз.

3. Элементар көлем: $\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i$

§ 3.3. Интегралдық қосынды

Барлық элементар бағаншалардың көлемдерін қосып, Риманның **екі еселі интегралдық қосындысын** аламыз:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta S_i$$

Мұндағы $d_i - \Delta D_i$ элементар облысының диаметрі (ең үлкен қашықтығы).

§ 3.4. Екі еселі интеграл анықтамасы

Анықтама: Торлардың максимал диаметрі $\lambda = max\ d_i \to 0$ ұмтылғанда интегралдық қосындының ақырлы шегі **екі еселі интеграл** деп аталады:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i$$

§ 3.5. Интегралданатындық шарты

Бар болу теоремасы:

Егер *f(x, y)* функциясы **D** жабық шенелген облыста **үзіліссіз** болса, онда ол осы облыста интегралданады, яғни екі еселі интегралы бар болады.

§ 3.6. Негізгі қасиеттері

1. Сызықтықтық: $\iint (\alpha f + \beta g)\, dS = \alpha \iint f\, dS + \beta \iint g\, dS$

2. Аддитивтілік: Егер $D = D_1 \cup D_2$ болса, $\iint_D f\, dS = \iint_{D1} f\, dS + \iint_{D2} f\, dS$

3. Орта мән теоремасы: $\iint_D f(x,y)\, dS = f(M_0) \cdot S_D$

§ 3.7. Қайталанбалы интегралдарға келтіру

Егер D облысы $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$ теңсіздіктерімен берілсе (d-дұрыс облыс):

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

§ 3.8. Интегралдау ретін ауыстыру

Егер D облысы $c \le y \le d$, $x_1(y) \le x \le x_2(y)$ түрінде берілсе, алдымен x, сосын y бойынша интегралдаймыз:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

§ 3.9. Полярлық координаттарға өту

Ауыстыру формуласы: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

Якобиан: $I = r$. Олай болса аудан элементі **dx dy = r dr dθ** болады.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

§ 3.10. Полярлық жүйеде есептеу

Егер D облысы $\alpha \le \theta \le \beta$, $r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$ шекараларымен берілсе:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr$$

§ 3.11. Геометриялық қолданбалары

1. Жазық фигураның ауданы: $S = \iint_D dx\, dy$

2. Дененің көлемі: $V = \iint_D |f(x, y)|\, dx\, dy$

§ 3.12. Физикалық қолданбалары

Егер $\rho(x, y)$ – жазық пластинаның беттік тығыздығы болса:

Массасы: $m = \iint_D \rho(x, y)\, dx\, dy$

Инерция моменттері: $I_x = \iint_D y^2 \rho\, dx\, dy$, $I_y = \iint_D x^2 \rho\, dx\, dy$

§ 3.13. Пластинаның ауырлық центрі

Пластинаның ауырлық центрінің $C(x_c, y_c)$ координаттары:

$$x_c = \frac{\iint_D x\,\rho\,dx\,dy}{m},\ y_c = \frac{\iint_D y\,\rho\,dx\,dy}{m}$$

§ 3.14. Типтік мысал есеп

Мысал: D: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$ тіктөртбұрышы бойынша $\iint_D (x + y)\,dx\,dy$ есептеңіз.

Шешуі: $\int_0^1 dx \int_0^2 (x + y)\,dy = \int_0^1 [xy +$

$\frac{y^2}{2}\,]_0^2\,dx = \int_0^1 (2x + 2)\,dx = [x^2 + 2x]_0^1 = 3.$

§ 3.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: Екі еселі интеграл жазық облыс бойынша функцияның жинақталуын сипаттайды, қайталанбалы интегралдар мен полярлық координаттар жүйесі арқылы есептеледі.

СӨЖ тапсырмалары:

1. $x^2 + y^2 \le R^2$ дөңгелегі үшін полярлық координаттармен $\iint (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ есептеңіз.

2. $y = x$ және $y = x^2$ сызықтарымен шектелген фигураның ауданын табыңыз.