ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

1-ДӘРІС

1-ТЕКТІ ҚИСЫҚСЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДАР (ДОҒА ҰЗЫНДЫҒЫ БОЙЫНША ИНТЕГРАЛ)

Г. М. Фихтенгольц курсы • 16-тарау

§ 1.1. Физикалық есеп: Материалдық сымның массасы

Есептің қойылымы: Кеңістіктегі немесе жазықтықтағы тегістелетін $L = AB$ материалдық қисығы берілсін. Қисықтың әрбір нүктесіндегі сызықтық тығыздық $\rho(x, y, z)$ белгілі. Қисықтың **m толық массасын** табу қажет.

Бұл есеп бір өлшемді түзудегі Риман интегралын қисықсызықты доғаларға жалпылауға әкеледі.

§ 1.2. Доғаны бөлшектеу және интегралдық қосынды

AB доғасын $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$ нүктелерімен бөлшектейміз:

1. Әрбір элементар $M_{i-1}M_i$ доғасының ұзындығын Δs_i деп белгілейміз.
2. Әрбір доғадан еркін $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ нүктесін таңдаймыз.
3. Интегралдық қосынды: $\boldsymbol{\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i}$.

§ 1.3. 1-текті қисықсызықты интегралдың анықтамасы

Анықтама: Бөлшектеу қадамы $\lambda = max\ \Delta s_i \to 0$ ұмтылғанда интегралдық қосындының P_i таңдауына тәуелсіз ақырлы шегі **f функциясының L қисығы бойынша 1-текті қисықсызықты интегралы** (немесе доға ұзындығы бойынша интеграл) деп аталады:

$$\int_L f(x, y, z)\, ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta s_i$$

§ 1.4. Геометриялық және физикалық мағынасы

1. **Масса:** Егер $f(x, y, z) = \rho(x, y, z)$ – тығыздық болса, онда $m = \int_L \rho\, ds$ – **материалдық қисықтың толық массасы**.

2. **Доға ұзындығы:** Егер $f = 1$ болса, онда $s = \int_L ds$ – **L қисығының ұзындығы**.

3. **Цилиндрлік бет ауданы:** Жазықтықта $z = f(x, y) \geq 0$ үшін $S = \int_L f(x, y)\, ds$ цилиндрлік беттің ауданын береді.

§ 1.5. Сызықтықтық және аддитивтілік қасиеттері

1. **Сызықтықтық:** $\int_L (c_1 f + c_2 g)\, ds = c_1 \int_L f\, ds + c_2 \int_L g\, ds$

2. **Аддитивтілік:** Егер $L = L_1 \cup L_2$ болып, L_1 мен L_2 тек ұшымен ғана түйіссе:

$$\int_L f\, ds = \int_{L_1} f\, ds + \int_{L_2} f\, ds$$

§ 1.6. Бағытқа тәуелсіздік қасиеті

Маңызды қасиет:

1-текті қисықсызықты интегралдың мәні қисық бойымен жүру бағытына **тәуелсіз** болады:

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int_{BA} f(x, y, z)\, ds$$

Себебі $\Delta s_i > 0$ доға ұзындығы әрқашан оң шама болып қалады.

§ 1.7. Есептеу: Параметрлік берілген жазық қисық

Егер L қисығы $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ теңдеулерімен берілсе, доға дифференциалы $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$ болып, Риман интегралына түрленеді:

$$\int_L f(x, y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\,\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$$

§ 1.8. Есептеу: Айқын берілген қисық y = g(x)

Егер қисық $y = g(x)$ $(a \le x \le b)$ түрінде берілсе, онда $ds = \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx$ болып, есептеу формуласы былай жазылады:

$$\int_L f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x, g(x))\,\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx$$

§ 1.9. Есептеу: Полярлық координаттарда r = r(θ)

Полярлық координаттарда $ds = \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$ болады ($\alpha \le \theta \le \beta$):

$$\int_L f(x, y)\, ds = \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, \sqrt{r^2 + [r'(\theta)]^2}\, d\theta$$

§ 1.10. Кеңістіктік қисықтар үшін есептеу

Егер 3D қисық $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ арқылы берілсе:

$$\int_L f(x, y, z)\, ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\, \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt$$

§ 1.11. Механикалық қолданбалар: Ауырлық центрі

Тығыздығы $\rho(x, y)$ болатын жазық materialдық қисықтың **ауырлық центрінің координаталары** (x_c, y_c):

$$x_c = \frac{\int_L x\,\rho\,ds}{m},\quad y_c = \frac{\int_L y\,\rho\,ds}{m}$$

Мұндағы $m = \int_L \rho\,ds$ – толық масса.

§ 1.12. 1-мысал: Кесінді бойынша интегралдау

Есеп: $I = \int_L (x + y)\, ds$ интегралын есептеңіз, мұндағы L – (0,0) мен (1,2) нүктелерін қосатын кесінді.

Шешуі: Кесінді теңдеуі $y = 2x$, $0 \le x \le 1$. $y' = 2$, $ds = \sqrt{1 + 2^2}\, dx = \sqrt{5}\, dx$.

$I = \int_0^1 (x + 2x)\, \sqrt{5}\, dx = 3\sqrt{5} \int_0^1 x\, dx = 3\sqrt{5}\, [$

$\underline{x^2 2}\,]_0^1 = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

§ 1.13. 2-мысал: Шеңбер бойынша интегралдау

Есеп: $I = \int_L (x^2 + y^2)\, ds$ интегралын есептеңіз, мұндағы L: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

Шешуі: $ds = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = R\, dt$.

$x^2 + y^2 = R^2$ болғандықтан:

$$I = \int_0^{2\pi} R^2 \cdot R\, dt = R^3 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R^3.$$

§ 1.14. Бар болу шарттары мен жиынтық

1. Егер L қисығы бөліктей-тегіс болып, ал $f(x, y, z)$ онда үзіліссіз болса, 1-текті қисықсызықты интеграл **әрқашан бар болады**.

2. Оны есептеу әрқашан стандартты анықталған Риман интегралына келтіріледі.

§ 1.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: 1-текті қисықсызықты интеграл доға ұзындығы бойынша анықталады, бағытқа тәуелсіз және скалярлық өрістерді қисық бойымен интегралдауға арналған.

СӨЖ тапсырмалары:

1. $y = x^2 / 2$ параболасының $(0,0)$ мен $(2,2)$ арасындағы доғасы бойынша $\int_L y\, ds$ интегралын есептеңіз.

2. Биіктігі h, радиусы R бұрандалы сызық $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = a\,t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ толық массасын табыңыз (тығыздығы $\rho = z$).