ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

13-ДӘРІС

СТИЛЬТЕС ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ ФИЗИКАЛЫҚ ҚОЛДАНБАЛАРЫ

Г. М. Фихтенгольц курсы • 15-тарау (§ 12–13)

§ 13.1. Физикалық шамалардың біртұтас моделі

Модельдік артықшылық: Стилтьес интегралы үзіліссіз таратылған (тығыздығы бар) шамалар мен жеке нүктелік (дискретті) салмақтарды **бірдей формуламен** есептеуге мүмкіндік береді.

$m(x)$ – $[a, x]$ кесіндісіндегі жинақталған масса функциясы болсын.

§ 13.2. Материалдық кесіндінің толық массасы

Егер массаның таралу функциясы $m(x)$ болса, $[a, b]$ кесіндісіндегі толық масса:

$$M = \int_a^b dm(x) = m(b) - m(a)$$

Бұл формула $m(x)$ үзіліссіз де, сатылы (секірмелі) болғанда да орындалады.

§ 13.3. Статикалық моменттер

Массасы $m(x)$ функциясымен таратылған кесіндінің **координат басына қатысты статикалық моментері** Стилтьес интегралымен былай жазылады:

$$S_0 = \int_a^b x \, dm(x)$$

§ 13.4. Ауырлық центрінің координатасы

Әркелкі немесе дискретті-үзіліссіз жүйенің **ауырлық центрінің координатасы x_c**:

$$x_c = \frac{S_0}{M} = \frac{\int_a^b x\, dm(x)}{\int_a^b dm(x)}$$

§ 13.5. Остік инерция моменті

Координат басына қатысты **инерция моменті (I_0)** әрбір элементар *dm* массасының арақашықтық квадратына көбейтіндісінің жинақталуын береді:

$$I_0 = \int_a^b x^2 \, dm(x)$$

§ 13.6. Жазық қисықтар бойындағы масса

Егер s – қисық доғасының ұзындығы болып, $\mu(s)$ – жинақталған масса болса, 1-текті қисықсызықты интеграл Стилтьес интегралына айналады:

$$M = \int_K d\mu = \int_0^{S_{толық}} d\mu(s)$$

§ 13.7. Өзгермелі күштің жұмысы

Егер **F(x)** күшінің орын ауыстыру бойынша потенциалдық немесе жинақталған импульсі *P(x)* функциясымен сипатталса:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx \text{ немесе } W = \int_a^b x\,dF(x)$$

Бөліктеп интегралдау арқылы бұл екі өрнек бір-біріне ауысады.

§ 13.8. Электр заряды және өріс потенциалы

Өткізгіште үздіксіз тығыздық та, точечный зарядтар да болуы мүмкін. Заряд функциясы $e(x)$ болсын.

Берілген x_0 нүктесіндегі **электростатикалық потенциал U**:

$$U(x_0) = \int_a^b \frac{de(x)}{|x - x_0|}$$

§ 13.9. Дисперсия мен математикалық күтім

Таралу функциясы $F(x)$ болатын кездейсоқ шаманың **дисперсиясы D[X]**:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \, dF(x)$$

Мұндағы $m_x = E[X] = \int x \, dF(x)$ – математикалық күтім.

§ 13.10. Экономикалық модельдер: Лоренц қисығы

Халықтың табыс бойынша таралуы $N(x)$ кумулятивті функциясымен берілсін.

Жалпы ұлттық табыс ($I_{толық}$):

$$I_{толық} = \int_0^{x_{max}} x \, dN(x)$$

§ 13.11. Доға ұзындығын Стилтьес интегралымен жазу

Тегістелетін *(K)* қисығының **s(t)** доға ұзындығы функциясы үшін кез келген үзіліссіз *f* функциясының интегралы:

$$\int_K f\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\,\psi(t))\,ds(t)$$

Бұл өрнек 1-текті қисықсызықты интегралдың Стилтьес интегралына тура келетінін дәлелдейді.

§ 13.12. 1-мысал: Дискретті массалар жүйесі

Есеп: $x = 1$ нүктесінде 2 кг, $x = 3$ нүктесінде 3 кг масса орналасқан. Жүйенің x_c ауырлық центрін Стилтьес интегралымен табыңыз.

Шешуі: $M = \int_0^4 dm = 2 + 3 = 5$ кг.

$S_0 = \int_0^4 x\, dm = 1\cdot 2 + 3\cdot 3 = 2 + 9 = 11$ кг·м.

$x_c = 11 / 5 = 2.2$ м.

§ 13.13. 2-мысал: Аралас масса жүйесі

Есеп: Кесіндінің біртекті тығыздығы $\rho = 2$ кг/м (0-ден 2-ге дейін) және $x = 1$ нүктесінде 5 кг шоғырланған масса бар. Толық инерция моментін I_0 табыңыз.

Шешуі: $m(x) = 2x + 5\,H(x - 1)$. $dm = 2\,dx + 5\,dH(x - 1)$.

$$I_0 = \int_0^2 x^2\,(2\,dx) + 1^2 \cdot 5 = 2\,[$$

$$\underline{x^3}3\;]_0^2 + 5 = \frac{16}{3} + 5 = \frac{31}{3}.$$

§ 13.14. Стилтьес интегралының ғылыми рөлі

1. Стилтьес интегралы дискретті және үздіксіз физикалық-математикалық есептерді бір формула аясында біріктіреді.

2. Бұл теория Лебег-Стилтьес интегралына және функционалдық талдаудағы Рисс теоремасына тікелей жол ашады.

§ 13.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: Стилтьес интегралы механикада, физикада, ықтималдықтар теориясы мен экономикада салмақтар мен тығыздықтардың жинақталуын сипаттайтын әмбебап математикалық аппарат болып табылады.

СӨЖ тапсырмалары:

1. $m(x) = x^3 + 2\,H(x - 2)$ масса таралуы үшін $[0, 3]$ аралығындағы инерция моментін I_0 табыңыз.
2. Дәлелдеңіз: Егер масса тек дискретті нүктелерде орналасса, Стилтьес интегралы классикалық шектік қосындыға айналады.