ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

9-ДӘРІС

ТЕГІСТЕЛЕТІН ҚИСЫҚТАР ЖӘНЕ ЖОРДАН ТЕОРЕМАСЫ

Г. М. Фихтенгольц курсы • 15-тарау (§ 5–6)

§ 9.1. Іштей сызылған сынық сызық

Жазықтықта немесе кеңістікте параметрлік $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ теңдеулерімен берілген **(K)** непрерывный доғасын қарастырайық.

Сегментті $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ бөлшектеп, $M_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ нүктелерін қосу арқылы іштей сызылған сынық сызық аламыз.

§ 9.2. Сынық сызықтың периметрі

Іштей сызылған сынық сызықтың P_T ұзындығы хордалар ұзындықтарының қосындысына тең:

$$P_T = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}$$

Мұндағы $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$, $\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1})$, $\Delta z_i = \chi(t_i) - \chi(t_{i-1})$.

§ 9.3. Тегістелетін (ұзындығы бар) қисық анықтамасы

Жордан Анықтамасы:

Егер барлық мүмкін бөлшектеулер үшін P_T сынық сызықтар ұзындықтарының жиыны жоғарыдан шенелген болса, онда **(K)** қисығы **тегістелетін (спрямляемая)** деп аталады.

$$s = \sup_T P_T < +\infty$$

s шамасы **(K) доғасының ұзындығы** деп аталады.

§ 9.4. Тегістелу туралы Жордан теоремасы

Жордан Теоремасы:

Параметрлік $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ қисығы тегістелетін (ұзындығы бар) болуы үшін оның координаттық функциялары $[\alpha, \beta]$ кесіндісінде **шекті вариациялы (өзгерісті)** болуы қажетті әрі жеткілікті.

§ 9.5. Векторлық функцияның вариациясы

r(t) = (φ(t), ψ(t), χ(t)) радиус-векторын енгізейік. Онда $P_T = \sum |\Delta r_i|$.

Қисық доғасының s ұзындығы **r(t)** векторлық функциясының $[\alpha, \beta]$ аралығындағы **толық вариациясына** тең болады:

$$s = V_{\alpha}^{\beta}(r)$$

§ 9.6. Ұзындықтың координаттық вариациялармен байланысы

Координаттық функциялардың толық вариациялары $V(\varphi)$, $V(\psi)$, $V(\chi)$ болсын.

Үшбұрыш теңсіздігі және квадраттық бағалау бойынша:

$$\max(V(\varphi), V(\psi), V(\chi)) \le s \le V(\varphi) + V(\psi) + V(\chi)$$

Бұл қос теңсіздік Жордан теоремасын дәлелдеудің негізі болып табылады.

§ 9.7. Тегіс қисықтардың ұзындығы

Теорема:

Егер $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ туындылары $[\alpha, \beta]$ аралығында үзіліссіз болса (тегіс қисық), онда қисық міндетті түрде тегістеледі және оның ұзындығы:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, dt$$

§ 9.8. Айқын функция графигінің ұзындығы

Егер жазық қисық $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ айқын теңдеуімен берілсе:

1. График тегістелетін болуы үшін $f(x)$ [a, b] кесіндісінде **шекті вариациялы** болуы жеткілікті.

2. Егер $f'(x)$ үзіліссіз болса, онда доға ұзындығы:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

§ 9.9. Доға ұзындығының аддитивтілігі

Егер C нүктесі AB тегістелетін доғасын екі AC және CB бөлікке бөлсе, онда толық доғаның ұзындығы бөліктердің ұзындықтарының қосындысына тең:

$$s(AB) = s(AC) + s(CB)$$

§ 9.10. Табиғи параметр ретіндегі доға ұзындығы

Ауыспалы $s(t) = V_\alpha^t(r)$ функциясын жаңа параметр ретінде таңдауға болады:

$$r = r(s),\ 0 \le s \le S_{толық}$$

Бұл параметрлеуде $|\mathbf{dr/ds}| = \mathbf{1}$ орындалады, яғни жанама вектор әрқашан бірлік вектор болады.

§ 9.11. Полярлық координаттардағы доға ұзындығы

Егер қисық полярлық жүйеде $r = r(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ теңдеуімен берілсе:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2}\, d\theta$$

§ 9.12. Тегістелмейтін үзіліссіз қисықтар

Ескерту:

Үзіліссіз қисықтың міндетті түрде ұзындығы бола бермейді. Егер $y = x \sin(\pi/x)$ графигі қарастырылса, ол үзіліссіз болғанымен, $[0, 1]$ кесіндісінде **ұзындығы шексіз ($s = +\infty$)** болады.

§ 9.13. Доға дифференциалы

Тегіс қисық үшін доға дифференциалының квадраты метрикалық тензорды өрнектейді:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Бұл өрнек 1-текті қисықсызықты және Стилтьес интегралдарын байланыстырады.

§ 9.14. Типтік мысал есеп

Мысал: $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ циклоидасының бір аркасының $(0 \le t \le 2\pi)$ ұзындығын табыңыз.

Шешуі: $x' = a(1 - \cos t),\ y' = a \sin t.\ (x')^2 + (y')^2 = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2(t/2).$

$$s = \int_0^{2\pi} 2a \sin(t/2)\, dt = [-4a \cos(t/2)]_0^{2\pi} = 8a.$$

§ 9.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: Қисықтың тегістелуі (ұзындығының болуы) координатық функциялардың шекті вариациялы болуымен баламалы; бұл теория 1-текті қисықсызықты интегралды негіздеуде басты орын алады.

СӨЖ тапсырмалары:

1. $r = a(1 + \cos\theta)$ кардиоидасының толық ұзындығын есептеңіз.
2. Жордан теоремасын пайдаланып, $x = t^2$, $y = t^3$ $(-1 \le t \le 1)$ қисығының тегістелетінін дәлелдеңіз.