ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Механика-математика факультеті

5-ДӘРІС

БЕТТІК ИНТЕГРАЛДАР

1-ші және 2-ші текті беттік интегралдар, векторлық өрістің ағыны, Стокс формуласы

§ 5.1. Беттердің ориентациясы (Бағытталуы)

Екі жақты бет: Егер бет бойымен контурмен айналып келгенде нормаль векторы өзінің бастапқы бағытын сақтаса, бет **екі жақты** деп аталады.

Бір жақты бет: Мысалы, Мёбиус лентасы (бір ғана беті мен шекарасы бар).

§ 5.2. Бірінші текті беттік интеграл анықтамасы

Тегіс **S** бетінде *f(x, y, z)* үзіліссіз функциясы берілсін. Бетті ΔS_i элементтеріне бөліп, Риман қосындысының шегін аламыз:

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\, \Delta S_i$$

§ 5.3. 1-текті беттік интегралды есептеу

Егер бет $z = z(x, y)$ теңдеуімен Oxy жазықтығындағы D проекциясында берілсе, **dS** элементі:

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy$$

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(x, y, z(x,y))\, \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy$$

§ 5.4. Екінші текті беттік интеграл

Анықтама: Бағытталған S беті арқылы өтетін **F = (P, Q, R)** векторлық өрісінің 2-текті беттік интегралы (немесе өріс ағыны):

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

§ 5.5. Интегралдар арасындағы байланыс

Егер $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – беттің бірлік нормаль векторы болса:

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

Бұл өрнек $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ скаляр көбейтіндісіне тең.

§ 5.6. 2-текті интегралды есептеу тәсілі

Егер S беті $z = z(x, y)$ түрінде беріліп, жоғарғы жағы (нормаль z осімен сүйір бұрыш $\gamma < 90°$ жасайтын) таңдалса:

$$\iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy = + \iint_D R(x, y, z(x,y))\,dx\,dy$$

Егер төменгі жағы таңдалса, таңбасы **минус** болады.

§ 5.7. Векторлық өрістің ағыны (Flux)

Ағын анықтамасы: **F** векторлық өрісінің S беті арқылы өтетін **Φ** ағыны деп 2-текті беттік интегралды айтамыз:

$$\Phi = \iint_S F \cdot n \, dS$$

§ 5.8. Стокс формуласы

Стокс Теоремасы:

Тұйық **L** контуры бойынша 2-текті қисықсызықты интеграл осы контурмен шектелген S беті арқылы алынған беттік интегралға тең:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \right]$$

§ 5.9. Стокс формуласының векторлық түрі

Векторлық талдауда **rot F** (вектор роторы) ұғымын кіргізе отырып, Стокс формуласын ықшам жазамыз:

$$\oint_L F \cdot dr = \iint_S (rot\ F) \cdot n\ dS$$

§ 5.10. Остроградский-Гаусс формуласына кіріспе

Тұйық S беті бойынша өріс ағыны осы бетпен шектелген V көлемі бойынша алынған **div F** үш еселі интегралына тең:

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V div \, F \, dV$$

§ 5.11. Беттің ауданын табу

Кеңістіктегі S бетінің **Ауданы** 1-текті беттік интегралмен есептеледі:

$$S = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy$$

§ 5.12. Күмбез түріндегі беттің массасы

Егер S бетінде беттік тығыздық $\gamma(x, y, z)$ тараған болса, онда беттің **массасы**:

$$m = \iint_S \gamma(x, y, z)\, dS$$

§ 5.13. Беттің ауырлық центрі

Жұқа беттік қабықшаның ауырлық центрі $C(x_c, y_c, z_c)$:

$$x_c = \frac{\iint \mathrm{x}\,\gamma\,\mathrm{dS}}{\mathrm{m}},\ y_c = \frac{\iint \mathrm{y}\,\gamma\,\mathrm{dS}}{\mathrm{m}},\ z_c = \frac{\iint \mathrm{z}\,\gamma\,\mathrm{dS}}{\mathrm{m}}$$

§ 5.14. Типтік мысал есеп

Мысал: S: $z = x + y$ тегістігінің $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ шаршысындағы бетінің ауданын табыңыз.

Шешуі: $z'_x = 1,\ z'_y = 1$. Олай болса $dS = \sqrt{(1 + 1 + 1)}\, dx\, dy = \sqrt{3}\, dx\, dy$.

$$S = \iint_D \sqrt{3}\, dx\, dy = \sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}.$$

§ 5.15. Қорытынды және СӨЖ тапсырмалары

Дәрістің түйіні: Беттік интегралдар кеңістіктегі беттер бойымен скаляр және векторлық шамалардың танымын зерттейді; Стокс формуласы контурлық және беттік интегралдарды байланыстырады.

СӨЖ тапсырмалары:

1. $z = \sqrt{(R^2 - x^2 - y^2)}$ жарты сферасының ауданын 1-текті беттік интегралмен табыңыз.
2. Стокс формуласы арқылы $\oint y\,dx + z\,dy + x\,dz$ интегралын есептеңіз.