КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

10-дәріс

Логарифм мен түбірдің голоморфты тармақтары

Дәрістің мақсаты

Логарифмнің бар болуы логарифмдік туындының периодтарына тәуелді.

Негізгі әдебиет. § 10, 63–72-беттер

Логарифмнің барлық мәні

Экспонентаның кері қатынасында нақты бөлік бірмәнді. Жорамал бөлік толық айналымдарға тәуелді.

$$\log z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Голоморфты тармақ

Ашық облыста экспонентасы бастапқы функцияға тең бірмәнді голоморфты функция таңдаймыз.

$$e^{L(z)} = f(z)$$

Қажетті шарт

Тармақ бар болса, екі жақты туындылатып, нөлден өзге функцияға бөлеміз. Алғашқы функцияның тұйық интегралы нөл.

$$L' = \frac{f'}{f}, \quad \oint_{\gamma} \frac{f'}{f}\, dz = 0$$

Жеткілікті шарттың дәлелдеуі

Тұйық интегралдар нөл болса, бастапқы нүктеден интеграл жолға тәуелсіз. Бастапқы тұрақтыны сол нүктедегі логарифм мәніне тең аламыз.

$$L(z) = L(a) + \int_a^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta$$

Экспонентаға кері оралу

Құрылған функцияның туындысын пайдаланып, төмендегі көбейтіндінің туындысы нөл екенін көреміз. Бастапқы мән бірге тең.

$$\left(e^{-L}f\right)' = 0, \quad e^{-L(a)}f(a) = 1$$

Жай байланысқан облыс

Нөлсіз голоморфты функцияның логарифмдік туындысы голоморфты. Тұйық жолдар облыста нөлге гомологиялы, сондықтан қажетті интегралдар нөл.

Тармаққа кедергі

Нөлді бір рет айналатын жолда айнымалының логарифмдік туындысының интегралы нөлден өзге. Сондықтан тесілген жазықтықта бірмәнді логарифм жоқ.

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Негізгі тармақ

Теріс нақты сәулені және нөлді алып тастаймыз. Аргументті минус пи мен пи арасында үздіксіз аламыз.

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z, \quad -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$$

Кесіктің екі жағындағы мәндер

Теріс нақты оське жоғарыдан жақындағанда аргумент пи, төменнен жақындағанда минус пи болады. Шектік мәндер екі пи жорамал бірлікке айырмашылық жасайды.

$$\operatorname{Log}(-r \pm i0) = \ln r \pm i\pi$$

Тармақтардың айырмасы

Екі тармақтың экспоненталары тең. Айырмасы дискретті жиында жатады, сондықтан байланысқан облыста тұрақты.

$$L_1 - L_2 = 2\pi i k$$

Түбірді логарифм арқылы құру

Таңдалған тармақты оң бүтін санға бөліп, экспонента аламыз. Бірліктің түбірлеріне көбейту арқылы қалған тармақтар табылады.

$$g_k(z) = e^{(L(z) + 2\pi i k)/n}$$

Түбірдің жалпы шарты

Түбір бар болса, логарифмдік туындының периоды екі пи жорамал бірліктің n еселігі. Кері бағытта интегралды n-ге бөліп экспоненталаймыз. Жол ауысқанда экспонента өзгермейді.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'}{f}\,dz \in n\mathbb{Z}$$

Логарифм қатары

Бір бөлінген бір плюс айнымалыны геометриялық қатарға жіктейміз. Нөлден бастап мүшелеп интегралдаймыз.

$$\operatorname{Log}(1+z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}z^{m}}{m},\quad |z|<1$$

Биномдық қатар

Таңдалған дәреже бірінші ретті теңдеуді орындайды.
Коэффициенттерді салыстырсақ, рекурсия шығады.

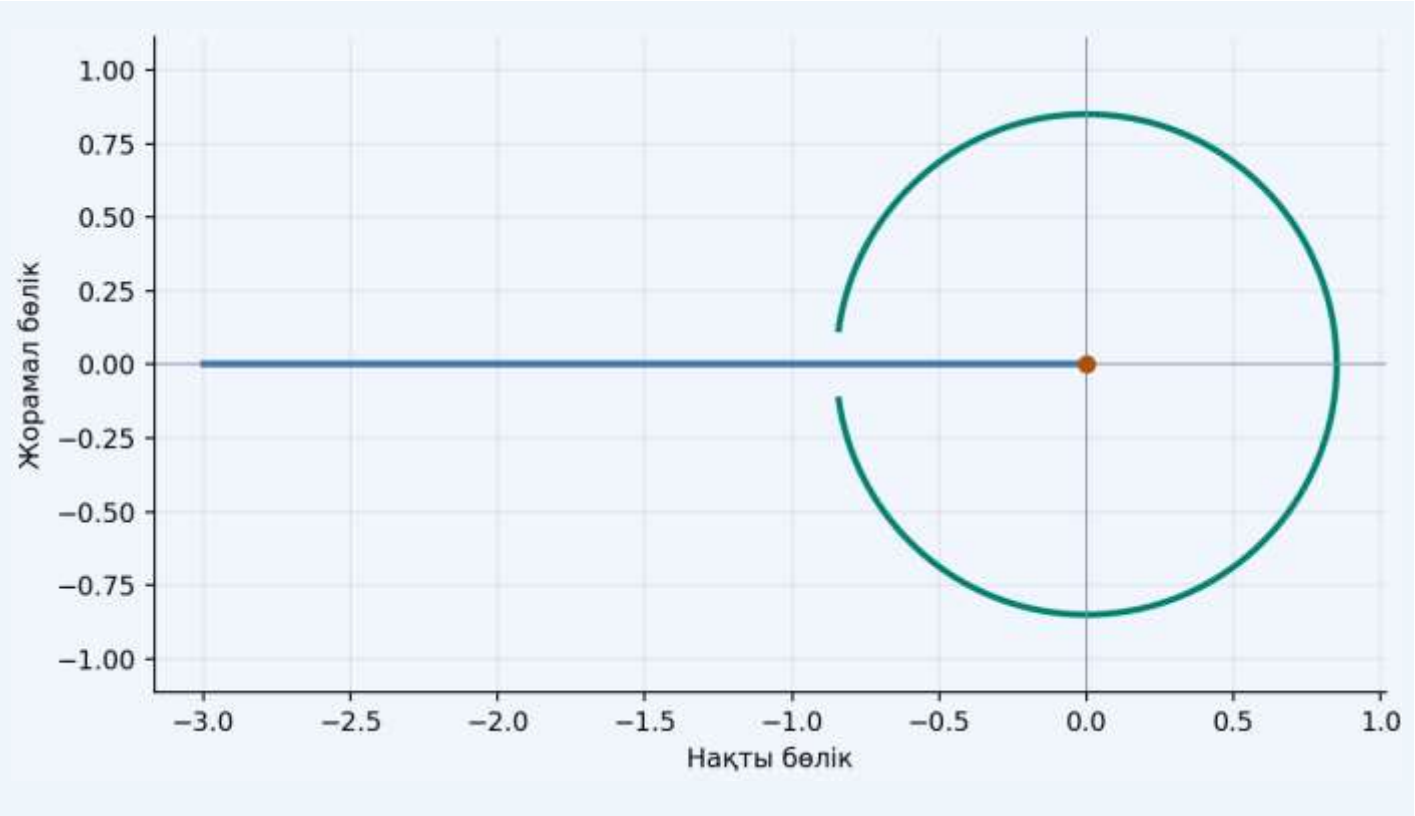
$$(1+z)y' = \alpha y, \quad a_{m+1} = \frac{\alpha - m}{m+1} a_m, \quad a_0 = 1$$

Квадрат түбір мысалы

Биномдық рекурсияға жартыны қоямыз. Алғашқы үш нөлден өзге коэффициентті есептейміз.

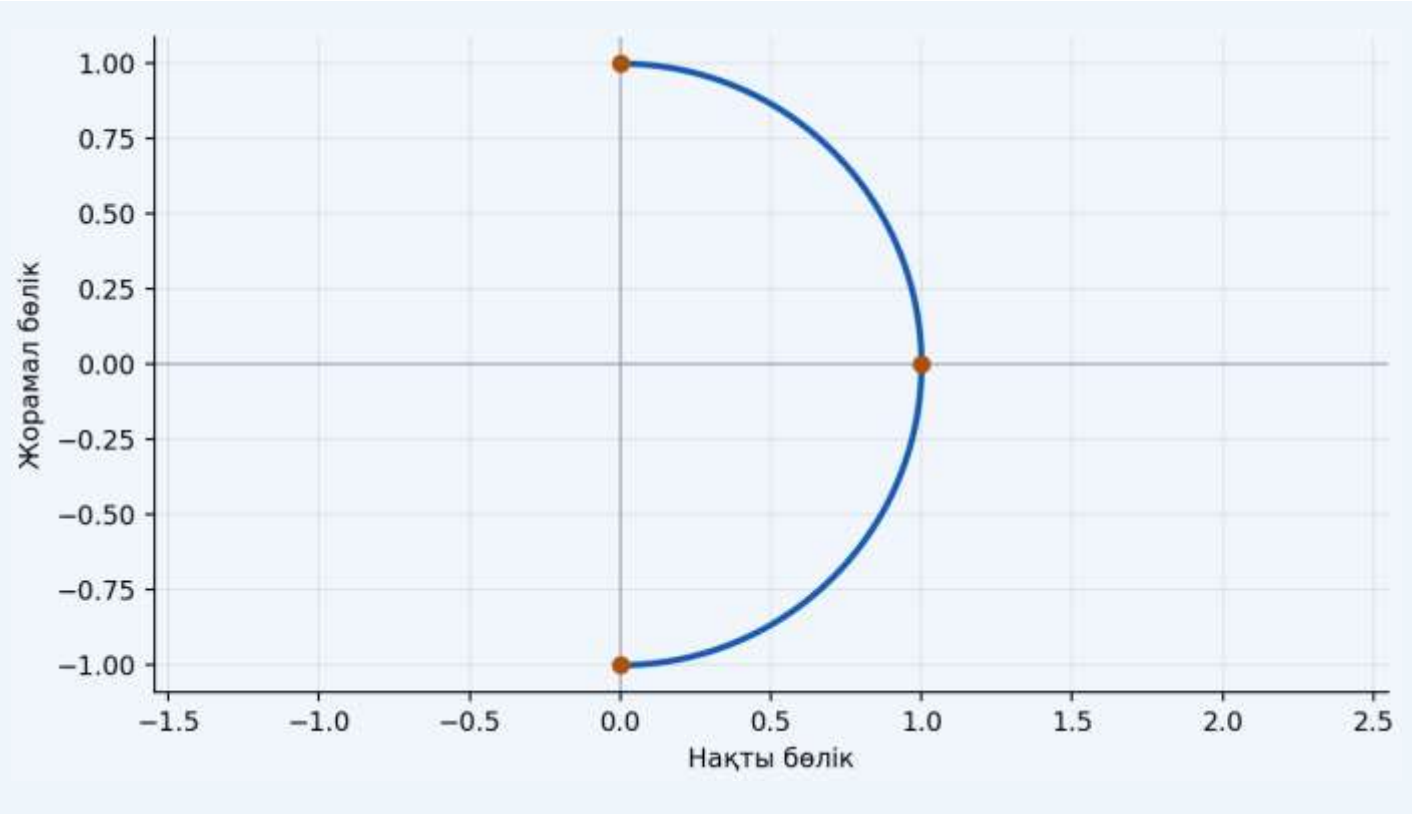
$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + O(z^3)$$

Логарифм тармағының кесігі



Теріс нақты сәуледе негізгі аргументтің екі шектік мәні π және −π.

Квадрат түбірдің негізгі тармағы



Бірлік шеңбердің кесіктен тыс бөлігі оң жарты шеңберге түседі.

Өздік тапсырма

1. Теріс нақты сәулесі кесілген жазықтықта z санының үшінші дәрежелі түбір тармағын жазыңыз.

2. Тесілген жазықтықта z^2 үшін квадрат түбір барын және логарифм жоғын түсіндіріңіз.

3. $(1-z)^{-1/2}$ қатарының алғашқы төрт мүшесін табыңыз.

Қорытынды

1. Логарифмнің бар болуы логарифмдік туындының периодтарына тәуелді.

2. Кесік аргументті бірмәнді таңдауға мүмкіндік береді.

3. Түбір үшін периодтардың бөлінгіштігі жеткілікті.