КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

4-дәріс

Комплекс интеграл және Коши теоремасы

Дәрістің мақсаты

Комплекс интеграл бағытталған жол арқылы анықталады.

Негізгі әдебиет. § 4, 22–30-беттер

Бағытталған жол

Параметр өскен сайын нүкте бастапқы ұшынан соңғы ұшына жылжиды.

$$z = \gamma(t), \quad a \leq t \leq b$$

Кесінді

Түзу кесіндінің параметрі екі ұштың дөңес комбинациясын береді. Жылдамдық тұрақты.

$$\gamma(t) = p + t(q - p), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Шеңбер

Оң бағдарда шеңбер сағат тіліне қарсы жүріледі. Центр мен радиус параметрден тікелей көрінеді.

$$\gamma(t) = c + Re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Интеграл анықтамасы

Бөліктеп тегіс жолда әр тегіс бөлікке нақты параметр бойынша интеграл алынады. Жолдың жеке түйісу нүктелеріндегі туынды мәні нәтижеге әсер етпейді.

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

Нақты және жорамал бөліктер

Функция мен дифференциалды көбейтіп, нақты және жорамал бөліктерін жеке интегралдаймыз.

$$f\,dz = (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy)$$

Бағдар өзгерісі

Кері параметрлеуде туынды теріс таңба алады. Айнымалыны ауыстырғанда интегралдың таңбасы өзгереді.

$$\int_{-\gamma} f\,dz = -\int_{\gamma} f\,dz$$

Ұзындық арқылы бағалау

Нақты параметрдегі интегралға үшбұрыш теңсіздігін қолданамыз. Функция модулін жолдағы жоғарғы шегімен алмастырамыз.

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le \max_\gamma |f|\, L(\gamma)$$

Алғашқы функция

Тізбекті ережемен жол бойындағы туындыны тауып, Ньютон–Лейбниц формуласын қолданамыз.

$$\int_{\gamma} F'(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Жолға тәуелділік

Бірлік шеңберге параметр қоямыз. Түйіндес функцияның интегралы нөлден өзге болғандықтан, дөңгелекте оның алғашқы функциясы жоқ.

$$\int_{|z|=1} \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

Гурса леммасы

Үшбұрыш пен оның іші голоморфтылық облысында жатса, шекара интегралы нөл. Дәлелдеуде үшбұрышты төрт ұқсас бөлікке бөлеміз.

$$|I(T_0)| \leq 4^n |I(T_n)|$$

Ішкі қабырғалардың қысқаруы

Көршілес үшбұрыштар ортақ қабырғаны қарама-қарсы бағытта өтеді. Төрт интегралдың бірінің модулі бастапқы модульдің кемінде төрттен біріне тең.

$$I(T) = \sum_{j=1}^{4} I(T_j)$$

Гурса леммасының аяқталуы

Қабаттас үшбұрыштардың ортақ нүктесінде сызықтық жуықтау жасаймыз. Тұрақты және сызықтық мүшелердің тұйық интегралы нөл. Қалдыққа ұзындық бағасын қолдансақ, еркін кіші шек шығады.

$$4^n |I(T_n)| \le \varepsilon L(T_0)\operatorname{diam}(T_0)$$

Дөңес облыста алғашқы функция

Негізгі нүктеден кесінді бойымен интеграл анықтаймыз. Үшбұрыш леммасы өсімшені қысқа кесінді интегралына айналдырады. Үзіліссіздік арқылы қатынас функция мәніне ұмтылады.

$$F(z+h)-F(z)=h\int_0^1 f(z+th)\,dt$$

Дөңес облыс үшін Коши теоремасы

Алдыңғы қадам бойынша голоморфты функцияның алғашқы функциясы бар. Тұйық жолдың екі ұшы бірдей болғандықтан интеграл нөл болады.

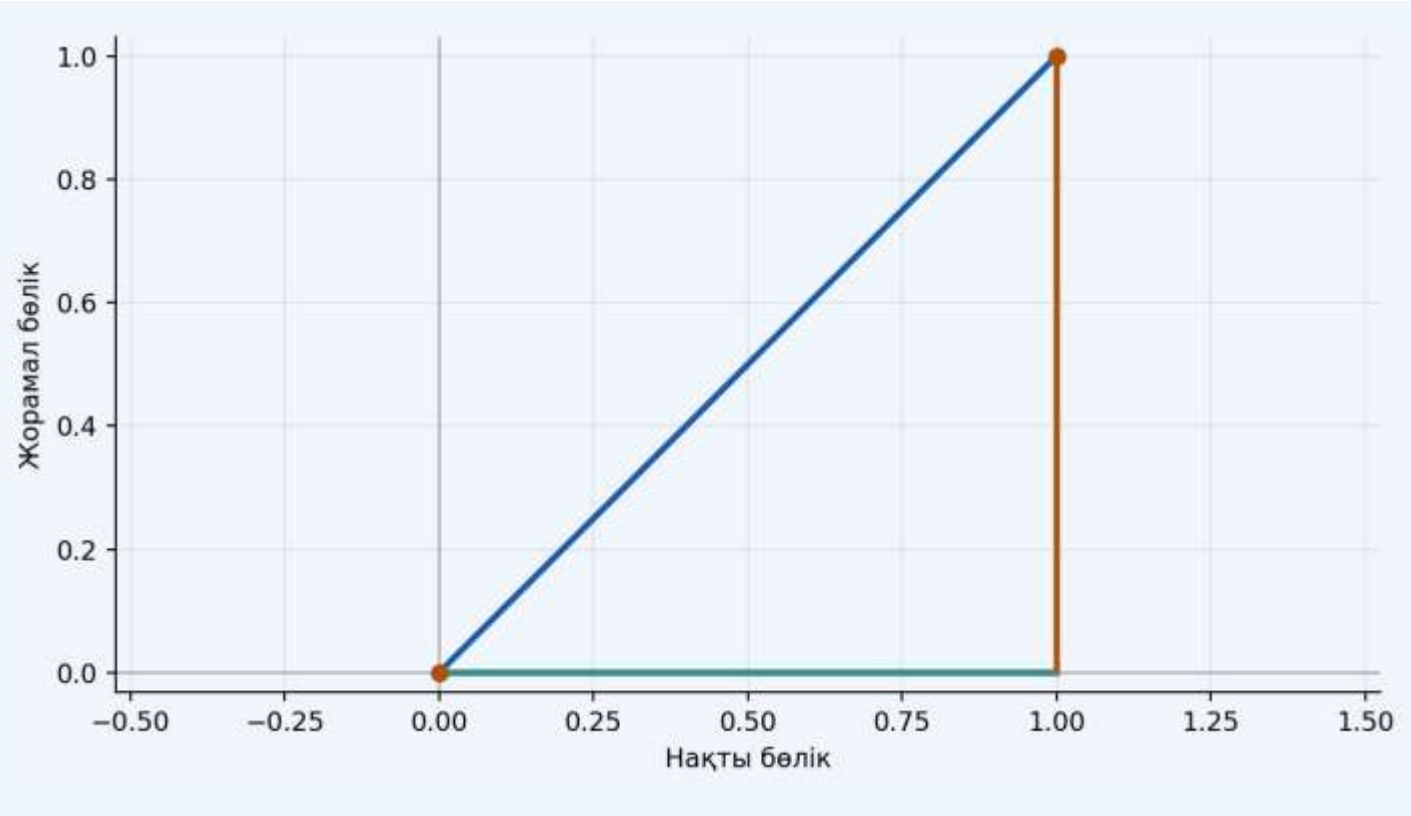
$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Тесілген облыстағы мысал

Кері функцияның шеңбер бойындағы интегралын тікелей есептейміз. Шеңбер нөлді қамтиды, ал нөлде функция анықталмаған.

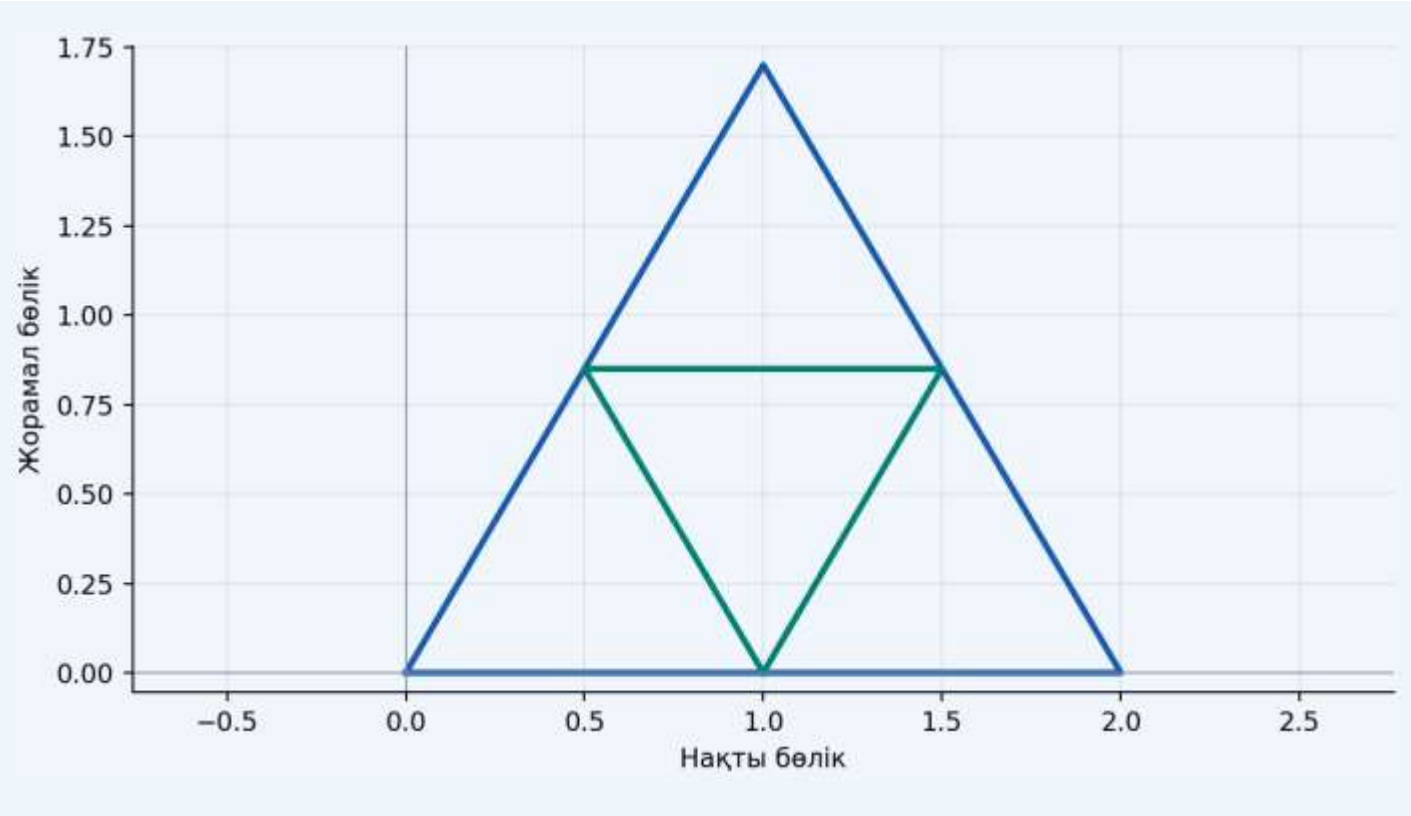
$$\oint_{|z|=R} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Бірдей ұштары бар екі жол



0 мен 1+і нүктелерін кесіндімен немесе екі буынды сынық сызықпен қосуға болады.

Гурса леммасындағы төрт үшбұрыш



Қабырғалардың орталары қосылғанда төрт ұқсас үшбұрыш шығады.

Өздік тапсырма

1. 0-ден 1+i-ге дейінгі кесіндіде $z\,dz$ интегралын табыңыз.

2. Бірлік шеңбер бойымен $z^n\,dz$ интегралын бүтін n үшін есептеңіз.

3. Үшбұрышты бөлгенде ішкі қабырғалардың қалай қысқаратынын сызыңыз.

Қорытынды

1. Комплекс интеграл бағытталған жол арқылы анықталады.

2. Гурса леммасы туындының үзіліссіздігін талап етпейді.

3. Дөңес облыста голоморфты функцияның тұйық жол бойындағы интегралы нөл.