КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

13-дәріс

Конформды бейнелеу және аналитикалық жалғастыру

Дәрістің мақсаты

Конформды бейнелеу жергілікті бұрыштарды сақтайды.

Негізгі әдебиет. §§ 13–14, 85–105-беттер

Сызықтық бейнелеу

Көбейту бұрып масштабтайды, тұрақтыны қосу жылжытады. Туынды тұрақты және нөлден өзге.

$$w = az + b, \quad a \neq 0$$

Бөлшек-сызықтық бейнелеу

Кері бейнелеуді сызықтық теңдеуден табамыз. Нөлден өзге анықтауыш сферада өзара бірмәнді сәйкестікті қамтамасыз етеді.

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad z = \frac{dw-b}{a-cw}$$

Жалпыланған шеңберлер

Шеңбер мен түзудің ортақ нақты теңдеуіне кері айнымалыны қоямыз. Бөлімнен құтылғанда сол түрдегі теңдеу қайта шығады.

$$A|z|^2 + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$$

Кэли бейнелеуі

Жоғарғы жарты жазықтықта жорамал бірлікке дейінгі қашықтық минус жорамал бірлікке дейінгіден аз. Кері формула кез келген ішкі мәнді қайтарады.

$$w = \frac{z - i}{z + i}, \quad z = i\frac{1 + w}{1 - w}$$

Дөңгелек автоморфизмдері

Алдымен берілген ішкі нүктені нөлге көшіреміз. Нөлді бекітетін автоморфизмге және кері бейнелеуге Шварц леммасын қолданамыз. Теңдік жағдайы бұрылуды береді.

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

Жолақ және сектор

Экспонента жолақтағы жорамал координатаны бұрышқа айналдырады. Бұрыш аралығы пи болса, бейне жоғарғы жарты жазықтық болады.

$$w = e^{\pi z/h}, \quad 0 < \operatorname{Im} z < h$$

Риман бейнелеу теоремасы

Бүкіл жазықтықтан өзге жай байланысқан облыс бірлік дөңгелекке конформды бейнеленеді. Нүктені нөлге және оның туындысын оң нақты санға бекіткенде бейнелеу жалғыз.

Шектелген инъекцияның құрылысы

Облыстан тыс нүктені азайтып, квадрат түбір тармағын аламыз. Түбір бейнесі бір нүктені қамтыса, оның қарама-қарсысын қамтымайды. Ашықтық бойынша сол қарама-қарсы нүкте маңындағы дөңгелек бейнеден тыс. Сол нүктеге қатысты кері шама шектелген инъекция береді.

Экстремал бейнелеу

Шектелген инъекцияны дөңгелекке масштабтап, бастапқы нүктені нөлге көшіреміз. Сол нүктедегі туынды модулін максималдаушы тізбек аламыз. Монтель шекті береді, туынды оң модульді сақтайды, Гурвиц инъективтілікті сақтайды.

Толық бейненің дәлелдеуі

Бейнеде жоқ b нүктесін дөңгелек автоморфизмімен нөлге көшіреміз. Квадрат түбір алып, бастапқы нүкте мәнін қайта нөлге көшіреміз. Туынды модулі төмендегі көбейткішке артады, бұл экстремалдыққа қайшы.

$$\frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}} > 1, \quad 0 < |b| < 1$$

Бейнелеудің жалғыздығы

Екі нормаланған бейнелеудің композициясы дөңгелектің нөлді бекітетін автоморфизмі. Туындысы оң нақты болғандықтан, оның бұрылу бұрышы нөл.

Аналитикалық жалғастыру

Қиылысатын облыстарда ортақ ашық бөліктегі теңдік арқылы функцияларды біріктіреміз. Жалғыздық теоремасы қиылысудың тиісті байланысқан бөлігінде теңдікті таратады.

Жол бойындағы жалғастыру

Жолды қабаттасатын дөңгелектермен жабамыз. Әр келесі қадамда алдыңғы дөңгелектегі мәндер жаңа аналитикалық өрнекті бірмәнді анықтайды.

Монодромия қағидасы

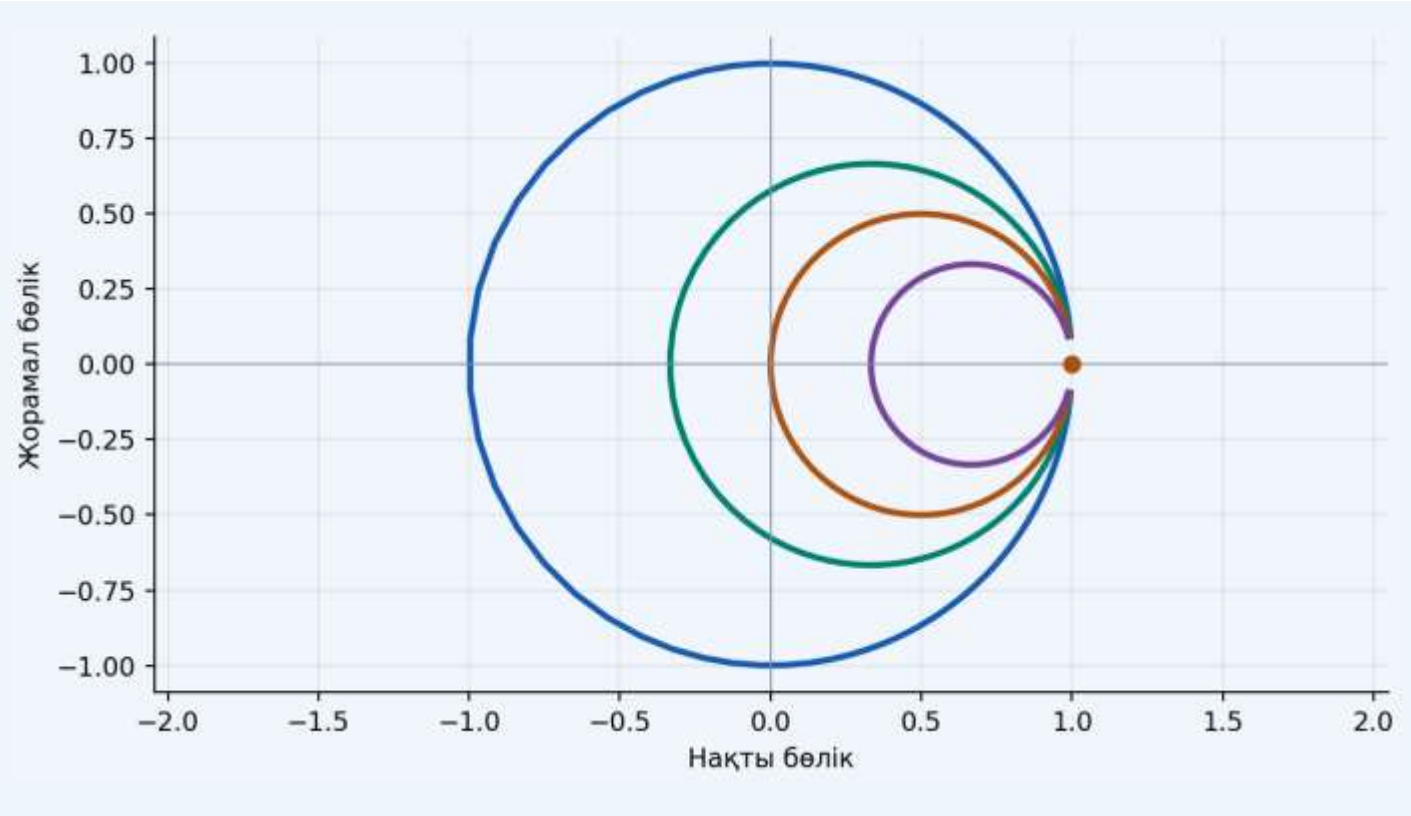
Барлық жол бойымен жалғастыру мүмкін болса, бірдей ұшты гомотопты жолдар бірдей соңғы тармақ береді. Гомотопия бойында бір жолға жарайтын ақырлы дөңгелектер тізбегі жақын жолдарға да жарайды. Соңғы тармақ параметр бойынша жергілікті тұрақты болғандықтан өзгермейді.

Шварцтың шағылдыру қағидасы

Нақты кесіндіде нақты мәнді үзіліссіз функцияны төменгі жаққа түйіндестірумен жалғастырамыз. Морера үшін кесіндіні қиятын үшбұрышты бөліп, ортақ шекара үлестерін қысқартамыз.

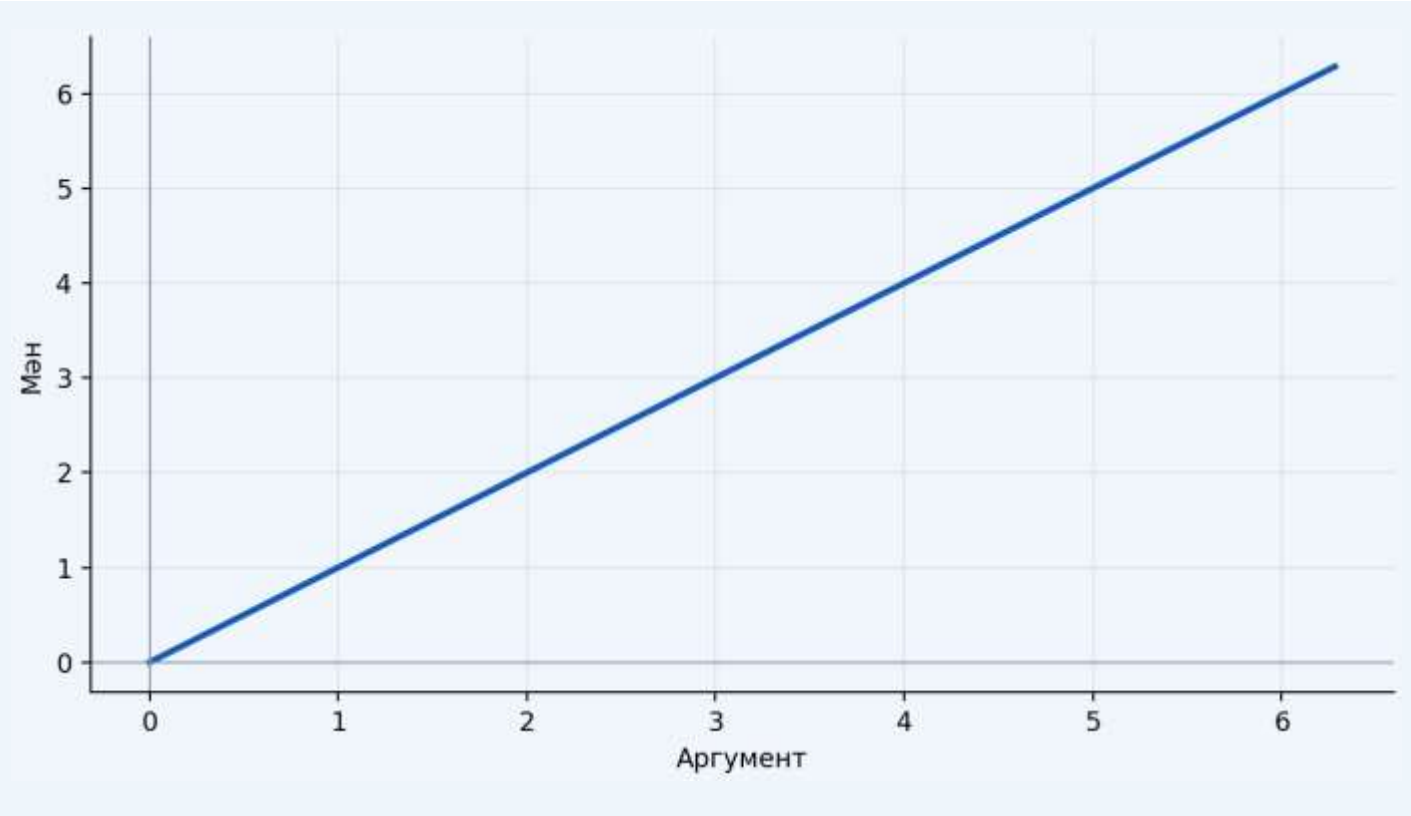
$$f(z)=\overline{f(\bar{z})},\quad \operatorname{Im} z<0$$

Кэли бейнелеуі



Нақты ось пен оған параллель түзулердің бейнелері шеңберлердің бөліктерін береді.

Логарифмнің жол бойындағы жалғасуы



Аргумент айналым бойында 0-ден 2π-ге дейін өседі. Жол тұйық болса да логарифм мәні өзгереді.

Өздік тапсырма

1 Кэли бейнелеуінің кері формуласын тексеріңіз.

2 $0<\arg z<\pi/3$ секторын жоғарғы жарты жазықтыққа бейнелеңіз.

3 Логарифмді нөлді бір айналатын жол бойымен жалғастырғанда мән қалай өзгереді?

Қорытынды

1. Конформды бейнелеу жергілікті бұрыштарды сақтайды.
2. Риман теоремасы жай байланысқан меншікті облысты дөңгелекпен байланыстырады.
3. Аналитикалық жалғастырудың соңғы мәні жолдың гомотопиялық класына тәуелді.