КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

15-дәріс

Асимптотикалық әдістер және Эйри функциясы

Дәрістің мақсаты

Лаплас әдісінде нақты максимум, стационар фаза әдісінде туындысы нөл болатын нүкте негізгі үлесті береді.

Негізгі әдебиет. § 17, 127–145-беттер

Асимптотикалық теңдік

Үлкен параметрде екі нөлден өзге өрнектің қатынасы бірге ұмтылса, олардың бас мүшелері бірдей деп айтамыз.

$$F(\lambda) \sim G(\lambda) \Leftrightarrow F(\lambda)/G(\lambda) \to 1$$

Лаплас әдісі

Нақты фазаның жалғыз ішкі максимумы азғындамаған болсын.
Амплитуда максимумда нөлден өзге және үзіліссіз болсын.
Интегралдың бас мүшесі максимум маңынан шығады.

$$I(\lambda) \sim a(x_0) e^{\lambda \phi(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |\phi''(x_0)|}}$$

Лаплас әдісінің сыртқы бағасы

Тұйық кесіндіде максимумның бекітілген маңайынан тыс фаза өзінің ең үлкен мәнінен оң шамаға кем. Сондықтан сыртқы үлес экспоненталық кіші.

$$\phi(x) \leq \phi(x_0) - \delta$$

Лаплас әдісінің ішкі бағасы

Фазаны екінші ретке дейін жіктеп, айнымалыны квадрат түбір масштабына ауыстырамыз. Кіші маңайда теріс квадраттық баға үстем функция береді. Шек Гаусс интегралына келеді.

$$x = x_0 + \frac{y}{\sqrt{\lambda}}$$

Стационар фазасы жоқ бөлік

Амплитуда тегіс және ықшам тіректі, фаза туындысы нөлден алыс болса, бөліктеп интегралдау бір кері дәреже береді. Тегістік жеткілікті болса, қадамды қайталауға болады.

$$e^{i\lambda\phi} = \frac{1}{i\lambda\phi'}\frac{d}{dx}e^{i\lambda\phi}$$

Стационар фазаның бас мүшесі

Жалғыз ішкі стационар нүкте азғындамаған болсын. Оның маңында тегіс айнымалы ауыстыру фазаны дәл квадраттық түрге келтіреді. Френель интегралы фазалық көбейткішті береді.

$$I(\lambda) \sim a(x_0) e^{i\lambda\phi(x_0) + i\pi\sigma/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|\phi''(x_0)|}}$$

Френель көбейткішінің шығуы

Квадраттық интегралға оң бәсеңдеткіш енгізіп, комплекс Гаусс формуласын қолданамыз. Бәсеңдеткіш нөлге ұмтылғанда квадрат түбірдің аргументі пи бөлінген төрт шамасын береді.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(\varepsilon - i\sigma)y^2/2}\, dy = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon - i\sigma}}$$

Ер нүкте әдісі

Голоморфты фазаның бірінші туындысы нөл, екінші туындысы нөлден өзге болсын. Екінші ретті мүше нақты теріс болатын бағытты таңдаймыз.

$$\phi(z) - \phi(z_0) = \frac{\phi''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3)$$

Контурды деформациялау

Екі жол арасындағы облыста интеграл астындағы функция голоморфты болса, тұйық шекара интегралы нөл. Шексіз ұштары бар контурда жалғаушы бөліктердің үлесін бөлек бағалаймыз.

Эйри функциясының контуры

Контур төменгі сәуледен жоғарғы сәулеге өтеді. Сәулелердің бұрыштары минус пи бөлінген үш және пи бөлінген үш. Кубтық мүше сол сәулелер бойында нақты теріс.

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t^3/3 - zt}\, dt$$

Эйри теңдеуінің дәлелдеуі

Интегралды екі рет туындылатамыз. Екінші туындыдан айнымалыға көбейтілген бастапқы функцияны азайтқанда, параметр бойынша толық туынды қалады. Оның шекаралық мәндері нөл.

$$\mathrm{Ai}''(z) - z\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{d}{dt} e^{t^3/3 - zt}\, dt = 0$$

Оң осьтегі ер нүкте

Оң аргументте параметрді аргументтің квадрат түбірімен масштабтаймыз. Оң ер нүктедегі фазаның мәні минус үштен екі. Тік бағытта квадраттық мүше кемуді береді.

$$S(w) = w^3/3 - w, \quad S'(1) = 0, \quad S(1) = -2/3$$

Оң осьтегі асимптотика

Контурды оң ер нүктеден тік өткіземіз. Квадраттық Гаусс мүшесі параметрдің кері квадрат түбірін береді. Бастапқы масштабпен біріктіргенде төрттен бір дәреже шығады.

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{x^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{-2x^{3/2}/3}, \quad x \to +\infty$$

Теріс осьтегі тербеліс

Косинустық интегралда масштабталған фаза бір оң стационар нүктеге ие. Екінші туынды оң, фазаның мәні минус үштен екі. Стационар фаза формуласынан косинустық бас мүше шығады.

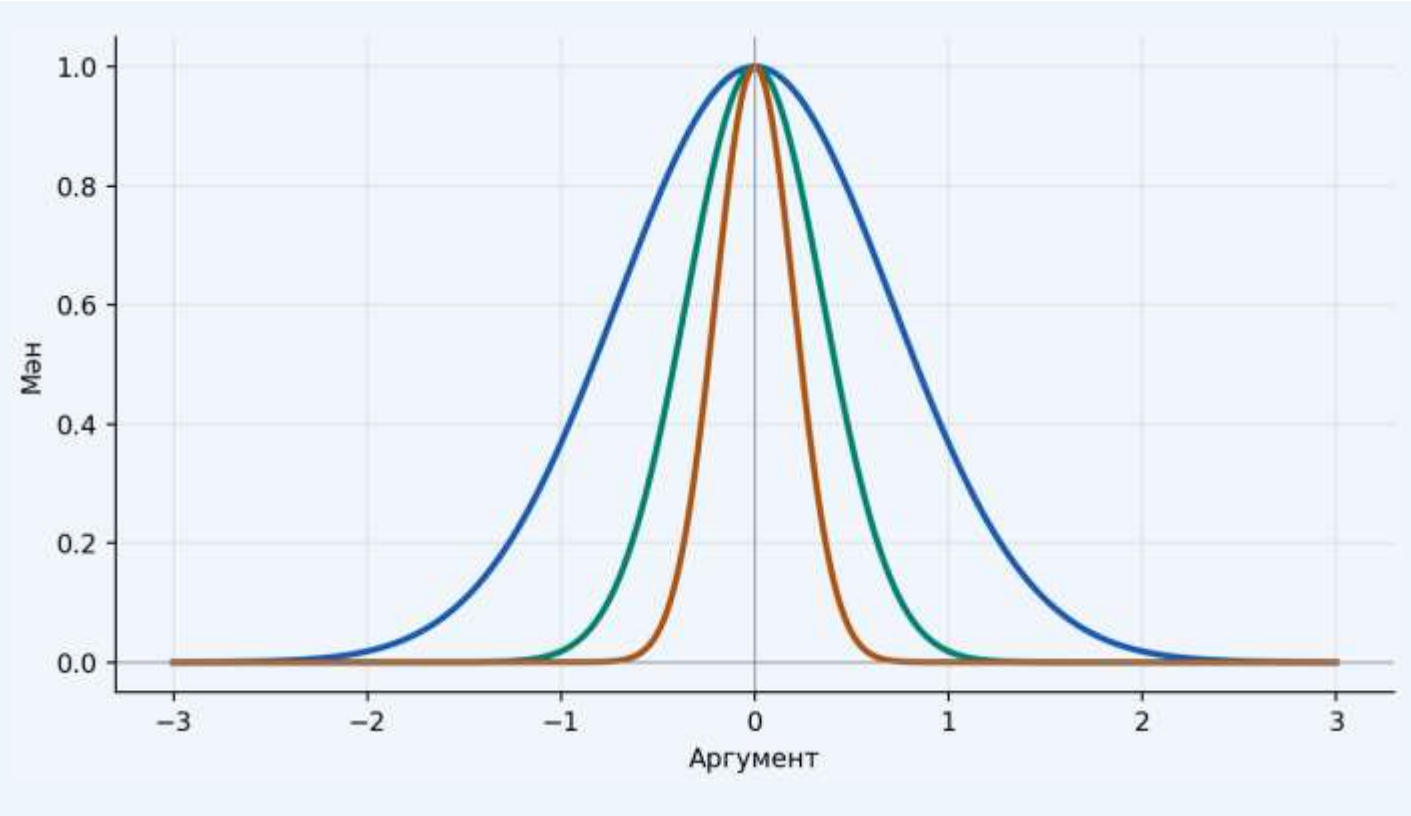
$$\mathrm{Ai}(-x) = \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos(2x^{3/2}/3 - \pi/4) + o(x^{-1/4})$$

Стокс құбылысы

Комплекс бағыт ауысқанда фазалардың нақты бөліктері өзгереді. Сондықтан басым экспонента мен асимптотикалық жіктелудің коэффициенттері секторға тәуелді болады.

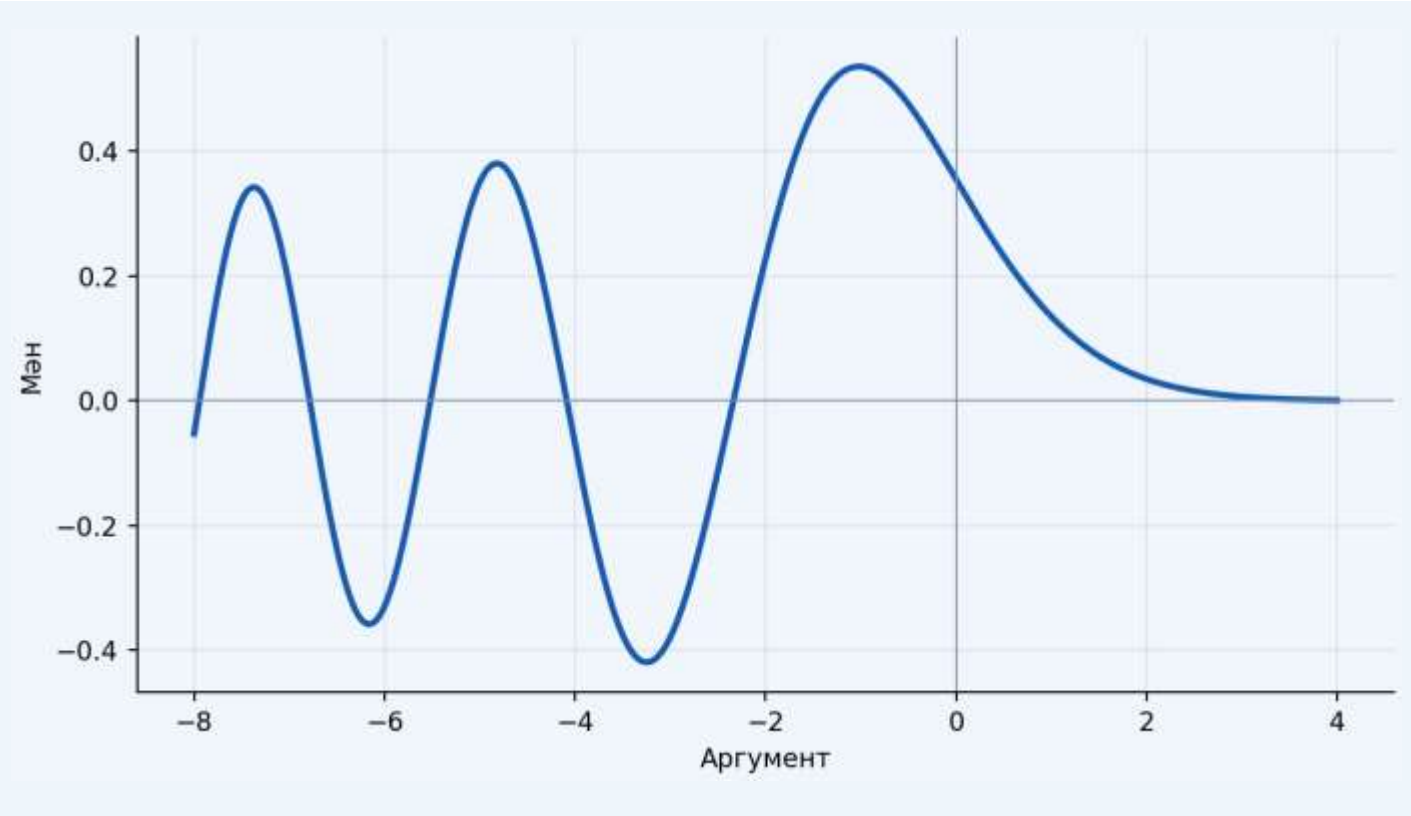
$$U_{\pm}(z) = z^{-1/4} e^{\pm 2z^{3/2}/3}$$

Лаплас әдісіндегі шоғырлану



Параметр λ өскен сайын экспонентаның негізгі бөлігі максимум маңына жиылады.

Эйри функциясының нақты графигі



Ai функциясы теріс осьте тербеліп, оң осьте тез бәсеңдейді.

Өздік тапсырма

1 Фазасы $-x^2$ болатын интеграл үшін Лаплас масштабын табыңыз.

2 $w^3/3-w$ фазасының екі ер нүктесіндегі мәндерін есептеңіз.

3 Эйри функциясының оң және теріс осьтердегі мінезін графикпен түсіндіріңіз.

Қорытынды

1. Лаплас әдісінде нақты максимум, стационар фаза әдісінде туындысы нөл болатын нүкте негізгі үлесті береді.

2. Комплекс фазада контурды ер нүкте арқылы өткізуге болады.

3. Эйри функциясы оң осьте бәсеңдейді, теріс осьте тербеледі.