КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

5-дәріс

Коши интегралдық формуласы

Дәрістің мақсаты

Коши формуласы ішкі мәнді шекара мәндерімен өрнектейді.

Негізгі әдебиет. § 5, 30–35-беттер

Контур және ішкі нүкте

Оң бағдарланған шеңбер мен оның ішіндегі нүктені аламыз. Функция тұйық дөңгелекті қамтитын ашық жиында голоморфты.

$$|z-a|<R, \qquad C=\{\zeta : |\zeta-a|=R\}$$

Коши интегралдық формуласы

Шекарадағы мәндер функцияның дөңгелек ішіндегі мәнін анықтайды.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Контурды кішірейту

Ішкі нүкте айналасына кіші шеңбер сызамыз. Екі контур арасын кесіп, Коши теоремасын қолданамыз. Кесіктің екі жағындағы интегралдар қысқарады.

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Сингуляр мүшені бөлу

Алымға нүктедегі мәнді қосып-азайтамыз. Тұрақты мүшенің интегралы параметрлеумен табылады.

$$\oint_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z)$$

Қалдықтың бағасы

Кіші шеңбер ұзындығы бөлімдегі радиуспен қысқарады. Үзіліссіздік бойынша қалған максимум нөлге ұмтылады.

$$\left| \oint_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq 2\pi \max |f(\zeta) - f(z)|$$

Нүкте сыртта жатқан жағдай

Ядроның бөлімі бүкіл дөңгелекте нөлден өзге. Интеграл астындағы функция голоморфты, сондықтан Коши теоремасы нөл береді.

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0, \quad |z - a| > R$$

Ядроның айырымдық қатынасы

Екі бөлшекті ортақ бөлімге келтіреміз. Нүкте контурдан оң қашықтықта тұрғандықтан, шек контурда бірқалыпты.

$$\frac{(\zeta - z - h)^{-1} - (\zeta - z)^{-1}}{h} = \frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}$$

Жоғары туындылар формуласы

Ядроны қайта-қайта туындылатамыз. Әр қадамда контурдан оң қашықтық бірқалыпты шекті қамтамасыз етеді.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

Коши бағасының дәлелдеуі

Шеңбер центрінде бөлімнің модулі тұрақты. Интегралды шеңбер ұзындығына және алымның ең үлкен модуліне сүйеніп бағалаймыз.

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_C |f|$$

Орта мән қасиеті

Орталық нүкте үшін шеңберді параметрлегенде ядро мен дифференциалдың көбейтіндісі тұрақты болады.

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{it})\,di$$

Лиувилль теоремасының дәлелдеуі

Шектелген бүтін функцияға кез келген радиус үшін Коши бағасын қолданамыз. Радиус шексіз өскенде бірінші туынды нөлге тең. Байланысқан жазықтықта функция тұрақты.

$$|f'(a)| \leq M/R \longrightarrow 0$$

Алгебраның негізгі теоремасы

Тұрақты емес көпмүшенің түбірі болмаса, кері шамасы бүтін болар еді. Ол шексіздікте нөлге кетеді және тұйық дөңгелекте шектелген. Лиувилль теоремасы қайшылық береді.

$$1/P(z) \longrightarrow 0, \quad |z| \to \infty$$

Бірінші ретті ядро мысалы

Екінші дәрежелі көпмүшені ішкі нүктеде есептейміз. Контур радиусы осы нүктені қамтуға жеткілікті болуы керек.

$$\oint_{|\zeta|=2} \frac{\zeta^2}{\zeta-1}\,d\zeta = 2\pi i$$

Жоғары ретті ядро мысалы

Үшінші дәрежелі бөлім екінші туындыға сәйкес келеді. Экспонентаның екінші туындысы нөл нүктесінде бірге тең.

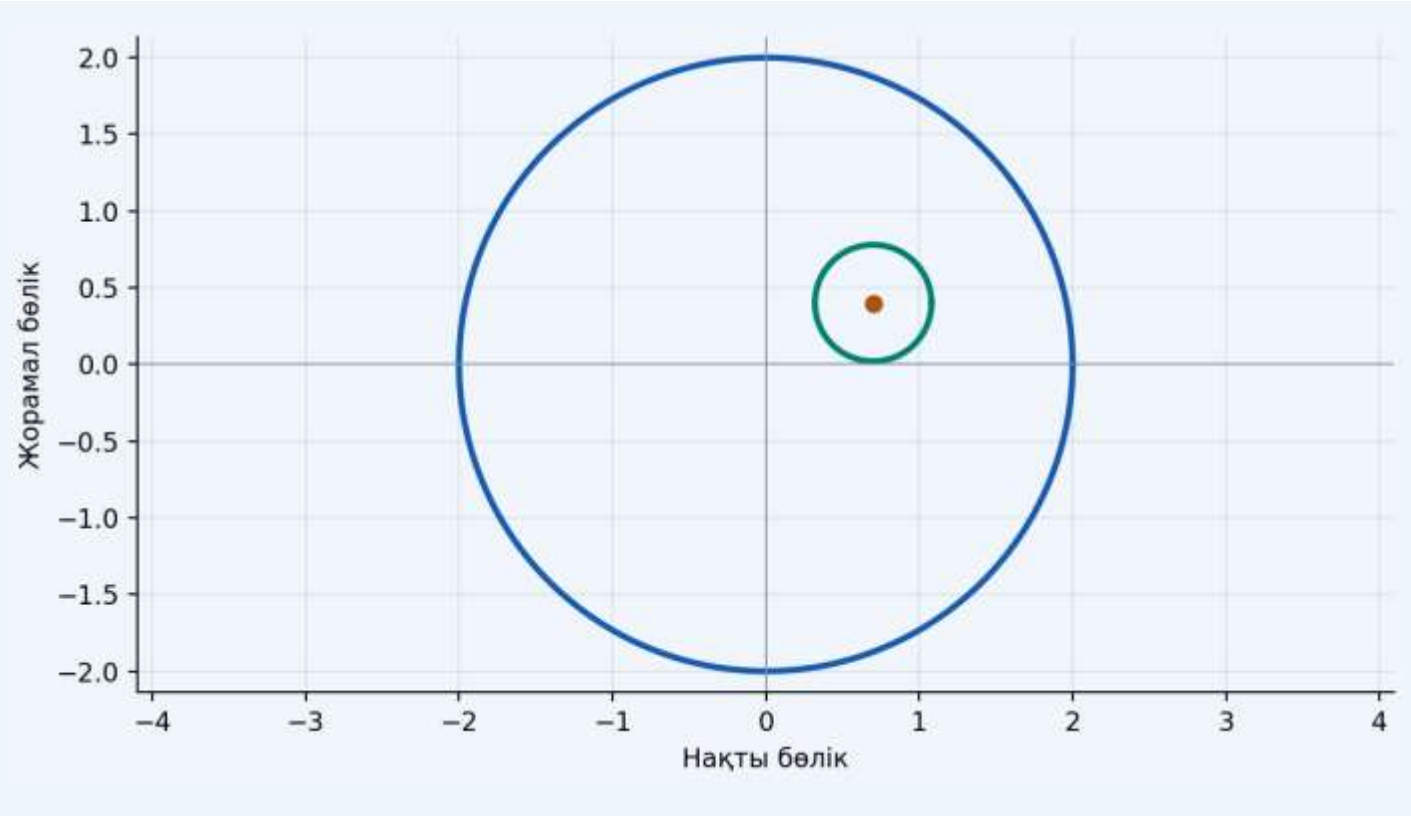
$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{e^{\zeta}}{\zeta^{3}}\, d\zeta = \pi i$$

Морера теоремасының дәлелдеуі

Үзіліссіз функцияның барлық ішкі үшбұрыш бойынша интегралы нөл болсын. Кіші дөңгелекте кесінді интегралы алғашқы функция береді. Коши формуласы арқылы оның туындысы голоморфты.

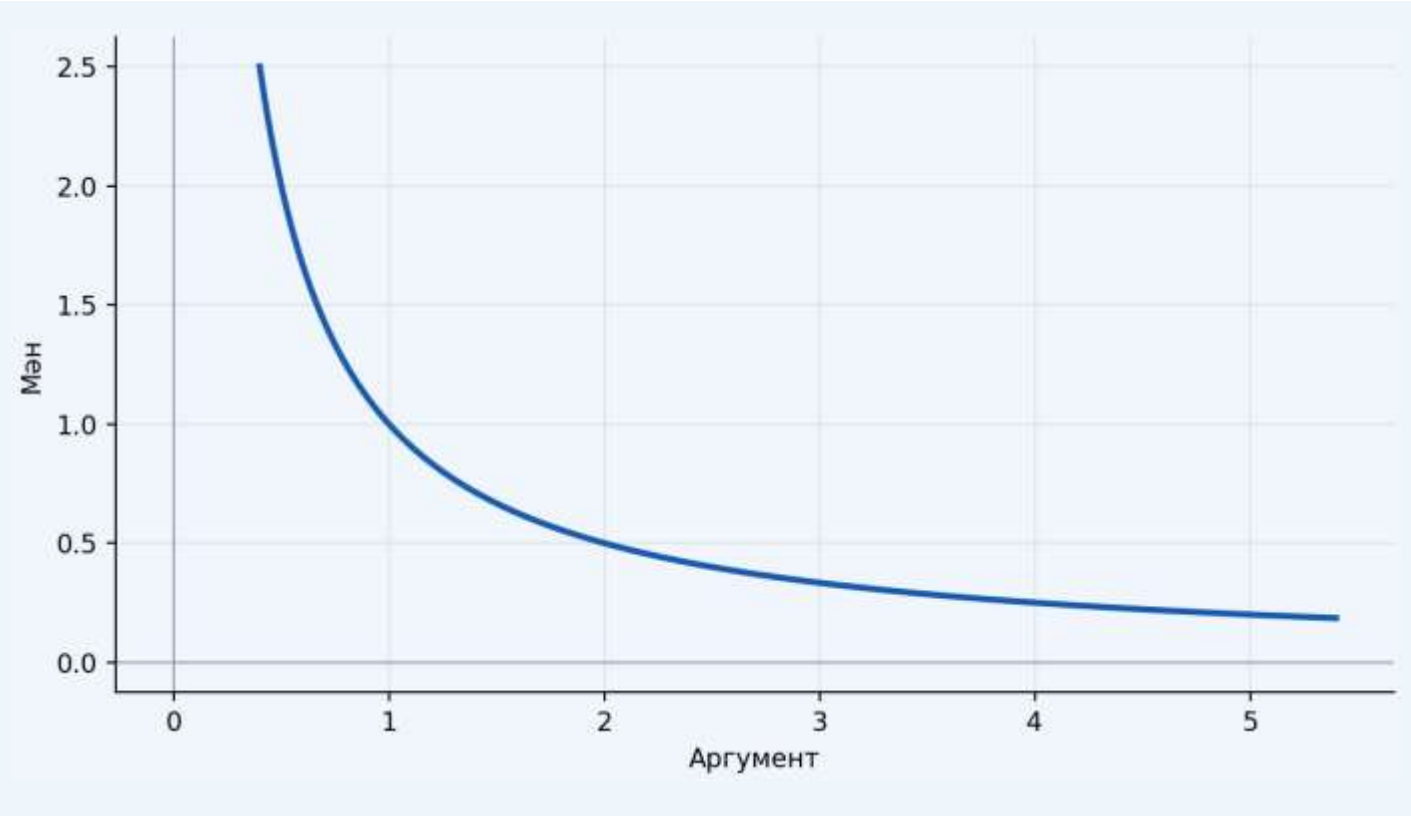
$$F' = f$$

Контурдың кішіреюі



Үлкен контурды ішкі нүктені қоршаған кіші шеңбермен алмастыруға болады.

Коши бағасының радиусқа тәуелділігі



M=1 болғанда бірінші туындыға арналған 1/R бағасы радиус өскен сайын төмендейді.

Өздік тапсырма

1 $|\zeta|=3$ шеңберінде $(\zeta^2+1)/(\zeta-2)$ интегралын есептеңіз.

2 Коши бағасынан өсуі $O(|z|^2)$ болатын бүтін функцияның көпмүше екенін дәлелдеңіз.

3 Туындылар формуласы арқылы $\sin \zeta/\zeta^4$ интегралын табыңыз.

Қорытынды

1. Коши формуласы ішкі мәнді шекара мәндерімен өрнектейді.
2. Жоғары туындылар сол ядроның дәрежелері арқылы есептеледі.
3. Коши бағасы Лиувилль теоремасын береді.