КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

12-дәріс

Жергілікті бірқалыпты жинақталу

Дәрістің мақсаты

Жергілікті бірқалыптылық әр ықшам ішкі жиында тексеріледі.

Негізгі әдебиет. § 12, 79–85-беттер

Анықтама

Облыстың әр ықшам ішкі жиынында жинақталу бірқалыпты болса, тізбек жергілікті бірқалыпты жинақталады.

$$\sup_{z\in K}|f_n(z)-f(z)|\longrightarrow 0,\quad K\subset D$$

Бірлік дөңгелектегі мысал

Әр кіші тұйық дөңгелекте геометриялық кему бар. Бүкіл ашық бірлік дөңгелекте жоғарғы шек бірге тең.

$$\max_{|z|\le r}|z^n| = r^n, \quad 0 < r < 1$$

Үзіліссіз шек

Әр ішкі нүктені тұйық кіші дөңгелекпен қоршаймыз. Бірқалыпты шектің үзіліссіздігі сол дөңгелекте сақталады.

Вейерштрасс теоремасы

Голоморфты функциялар тізбегі жергілікті бірқалыпты жинақталса, шегі голоморфты. Барлық ретті туындылар да жергілікті бірқалыпты жинақталады.

Голоморфтылықтың дәлелдеуі

Ішкі үшбұрыш шекарасы ықшам. Ұзындық бағасы интеграл мен шекті ауыстыруға мүмкіндік береді. Интегралдар нөл болғандықтан, Морера теоремасын қолданамыз.

$$\oint_{\partial T} f\,dz = \lim_{n\to\infty} \oint_{\partial T} f_n\,dz = 0$$

Туындылар үшін баға

Ықшам жиынның әр нүктесіне бірдей кіші радиусты таңдаймыз. Сол шеңберлер бір ықшам кеңейтілген жиында жатады. Коши бағасын айырмаға қолданамыз.

$$\sup_K |f_n^{(m)} - f^{(m)}| \le m!\, r^{-m} \sup_{K_r} |f_n - f|$$

Қатарларға қолдану

Ішінара қосындылар голоморфты. Мажоранттар қосындысы әр ықшам жиында жинақталса, шек пен туындылар туралы теорема қолданылады.

Ықшам жиындағы шектелу

Әр ықшам жиын үшін бүкіл функциялар отбасына ортақ шек бар делік. Коши бағасы кішірек жиында туындыға ортақ шек береді.

$$|f'(z)| \leq M/r$$

Тең дәрежелі үзіліссіздік

Жақын екі нүктені бір кіші дөңгелекке алып, кесінді бойымен туындыны интегралдаймыз. Ортақ туынды шегі функциялар айырмасын бірдей бағалайды.

$$|f(z) - f(w)| \leq C|z - w|$$

Монтель теоремасы

Жергілікті бірдей шектелген голоморфты функциялар тізбегінен жергілікті бірқалыпты жинақталатын ішкі тізбек таңдауға болады.

Ықшамдықтың дәлелдеуі

Облысты бірінің ішіне бірі кіретін ықшам жиындармен сарқимыз. Әр жиында ортақ шектелу мен тең дәрежелі үзіліссіздік бар. Арцела–Асколи теоремасымен ішкі тізбек таңдап, диагональ бойынша жалғастырамыз.

Гурвиц теоремасы

Нөлсіз голоморфты функциялар жергілікті бірқалыпты жинақталсын. Байланысқан облыста шек не нөлсіз, не тепе-тең нөл.

Гурвиц теоремасының дәлелдеуі

Шек тепе-тең нөл болмасын және оқшау нөлі болсын. Сол нөлді қоршаған шеңберде модульдің минимумы оң. Жеткілікті үлкен индексте Руше теоремасы бастапқы функцияда да нөл барын көрсетеді.

Витали қағидасы

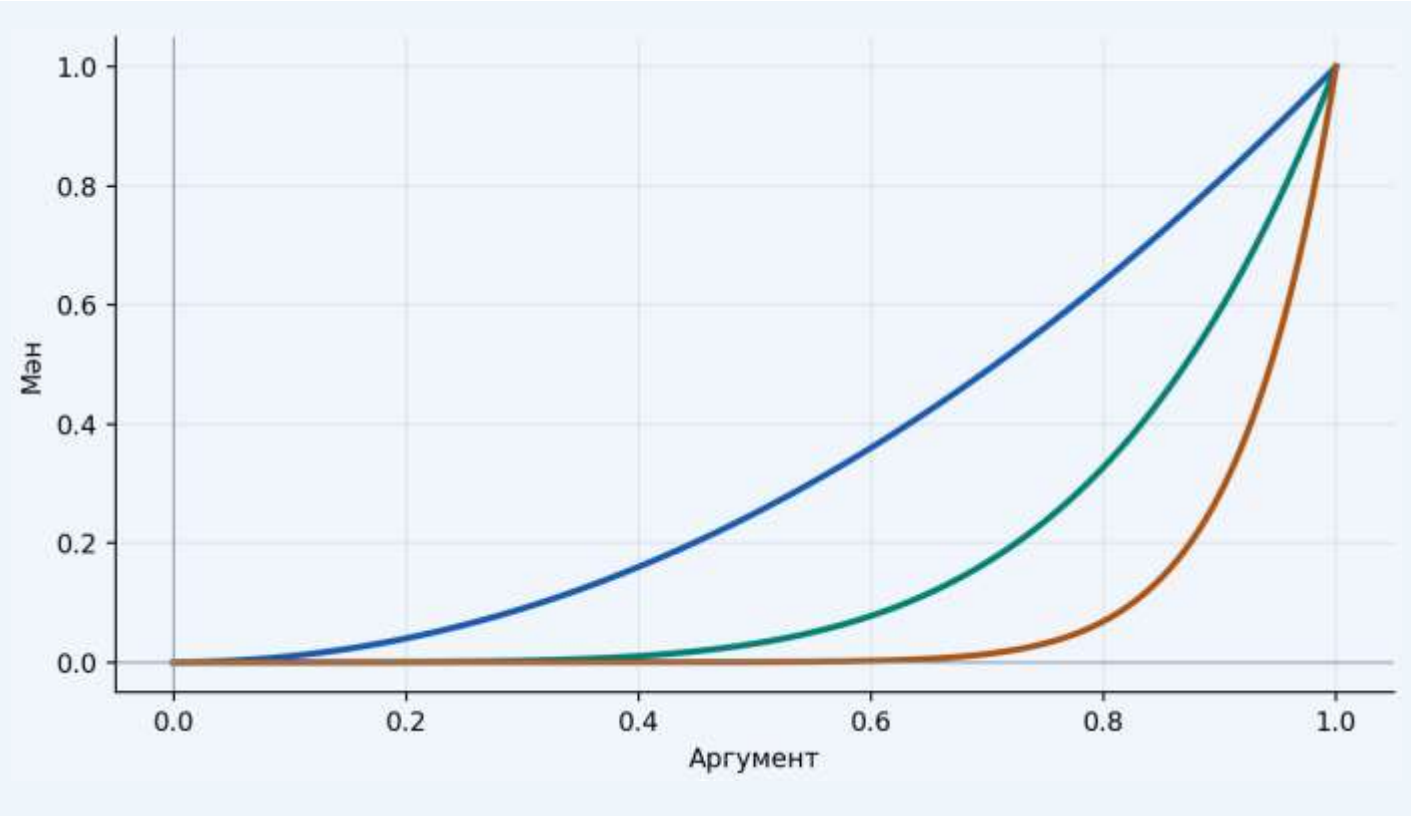
Жергілікті шектелген тізбек ішкі шектік нүктесі бар жиында нүктелік жинақталса, барлық ықтимал ішкі тізбек шектері жалғыздық теоремасымен тең. Монтель теоремасы арқылы толық тізбектің жергілікті бірқалыпты жинақталуы шығады.

Бүтін шек мысалы

Әр тұйық дөңгелекте құрама дәреженің логарифмін жіктейміз. Қалдық радиус бекітілгенде бірқалыпты кемиді.

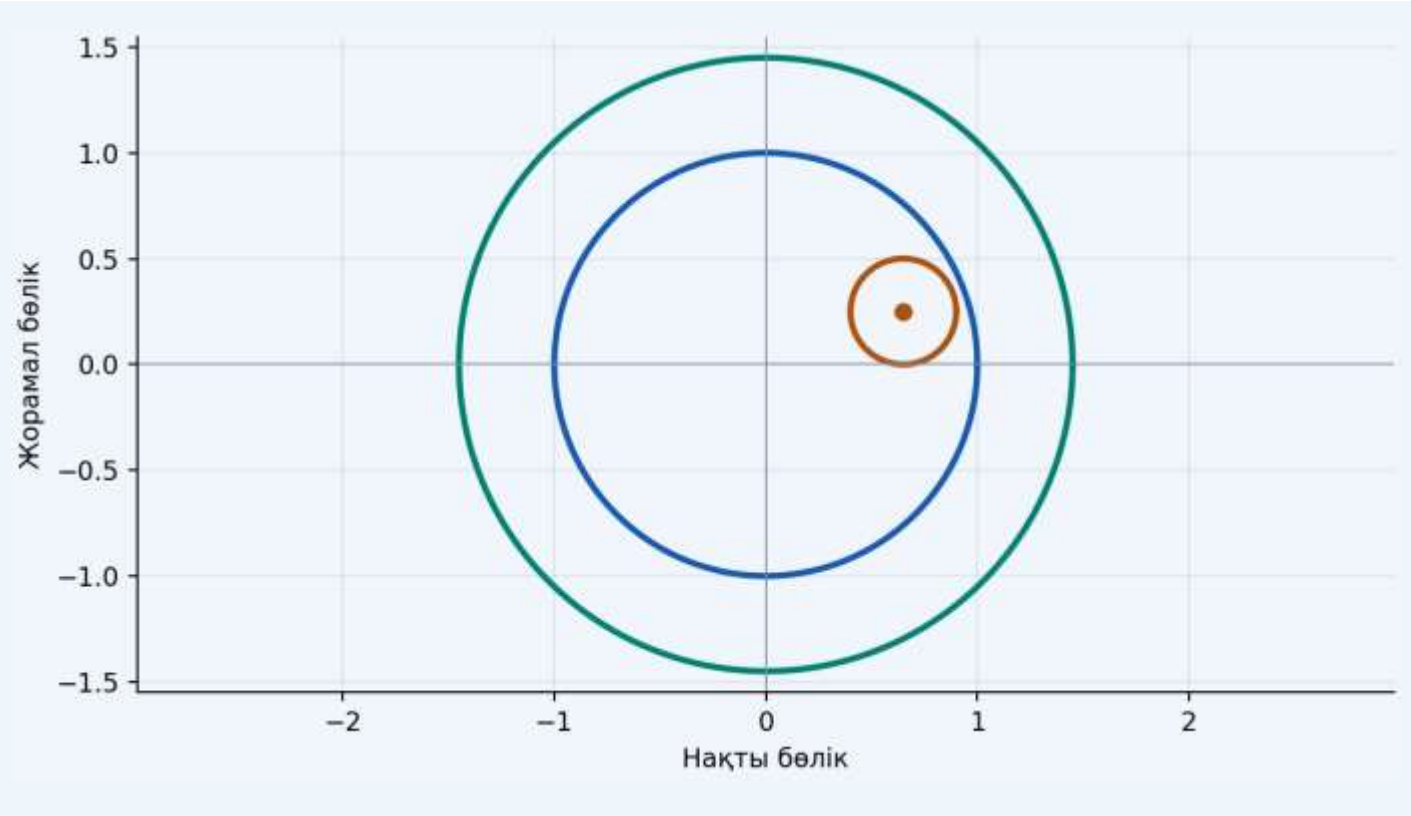
$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \longrightarrow e^z$$

Жергілікті бірқалыпты жинақталу



x^n қисықтары n=2, 5, 12 үшін берілген. Шекараға жақындағанда жинақталу баяулайды.

Ықшам жиынның кеңейтілуі



Ішкі ықшам жиынның айналасына бірдей радиуспен шеңберлер салуға орын бар.

Өздік тапсырма

1 $\sum z^n/n^2$ қатарының ашық бірлік дөңгелектегі туындысын табыңыз.

2 z^n тізбегінің туындыларының кіші тұйық дөңгелектерде нөлге бірқалыпты ұмтылуын дәлелдеңіз.

3 Нөлсіз e^{-n} тұрақтыларының шегін Гурвиц теоремасымен салыстырыңыз.

Қорытынды

1. Жергілікті бірқалыптылық әр ықшам ішкі жиында тексеріледі.
2. Голоморфтылық пен туындылар осы жинақталуда сақталады.
3. Монтель теоремасы ішкі тізбек таңдауға, Гурвиц теоремасы нөлдерді бақылауға мүмкіндік береді.