КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

3-дәріс

Дәрежелік қатарлар және элементар функциялар

Дәрістің мақсаты

Түбірлік белгі дәрежелік қатардың жинақталу радиусын береді.

Негізгі әдебиет. § 3, 15–22-беттер

Дәрежелік қатар

Қатар орталығы мен коэффициенттері оның жинақталу облысын анықтайды.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

Радиус формуласы

Жоғарғы шекті пайдалану коэффициенттердің кейбірі нөл болғанда да радиусты анықтауға мүмкіндік береді.

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

Радиус формуласының дәлелдеуі

Мүшенің модулінің түбірін аламыз. Жоғарғы шек бірден кіші болса түбірлік белгі бойынша абсолют жинақталады. Бірден үлкен болса мүшелер нөлге ұмтылмайды.

$$\limsup |a_n (z-a)^n|^{1/n} = |z-a|/R$$

Шекарадағы жинақталу

Радиус шекарадағы нүктелерді жеке тексеруді талап етеді. Берілген қатар бірлік шеңберінің барлық нүктесінде абсолют жинақталады.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \qquad R = 1$$

Бірқалыпты жинақталу

Радиусы жинақталу радиусынан кіші кез келген тұйық дөңгелекте Вейерштрасс белгісін қолданамыз.

$$|a_n(z-a)^n| \leq |a_n| r^n, \qquad r < R$$

Қатарды мүшелеп туындылату

Туынды қатардың радиусы бастапқы радиусқа тең. Бұл бүтін көбейткіштің түбірі бірге ұмтылатынынан шығады.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

Мүшелеп туындылатудың дәлелдеуі

Нүкте мен өсімшесі бар нүктені бір кіші дөңгелекке аламыз. Дәрежелер айырымының қатынасы төмендегі бағамен шектеледі. Жинақталатын үстем қатар арқылы шекті қосынды ішіне өткіземіз.

$$\left|\frac{w^n - v^n}{w - v}\right| \le n r^{n-1}, \quad |w|, |v| \le r < R$$

Геометриялық қатар

Ақырлы қосындыны бір минус айнымалыға көбейтсек, екі мүше қалады. Соңғы дәреже нөлге ұмтылғанда шексіз қосынды алынады.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

Экспонента

Қатынас белгісі бойынша қатар кез келген комплекс нүктеде жинақталады. Мүшелеп туындылату экспонентаның өзіне тең туынды береді.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (e^z)' = e^z$$

Экспонентаның қосу формуласы

Абсолют жинақталу Коши көбейтіндісін қолдануға мүмкіндік береді. Толық дәрежесі бірдей мүшелерді топтап, Ньютон биномын аламыз.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \frac{(z+w)^n}{n!}$$

Эйлер формуласы

Жорамал аргументті экспонентаға қойып, жұп және тақ дәрежелерді жеке жинаймыз.

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

Синус пен косинус

Экспоненталардың қосындысы мен айырмасын аламыз. Қатарлар бүкіл жазықтықта жинақталады.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Экспонентаның периоды

Модуль бойынша периодтың нақты бөлігі нөл. Аргумент бойынша жорамал бөлігі толық айналымға еселі.

$$e^{z+w} = e^z \Leftrightarrow w = 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Экспонента теңдеуі

Оң модульдің нақты логарифмін және мүмкін аргументтерді жазамыз. Әр аргумент бір шешім береді.

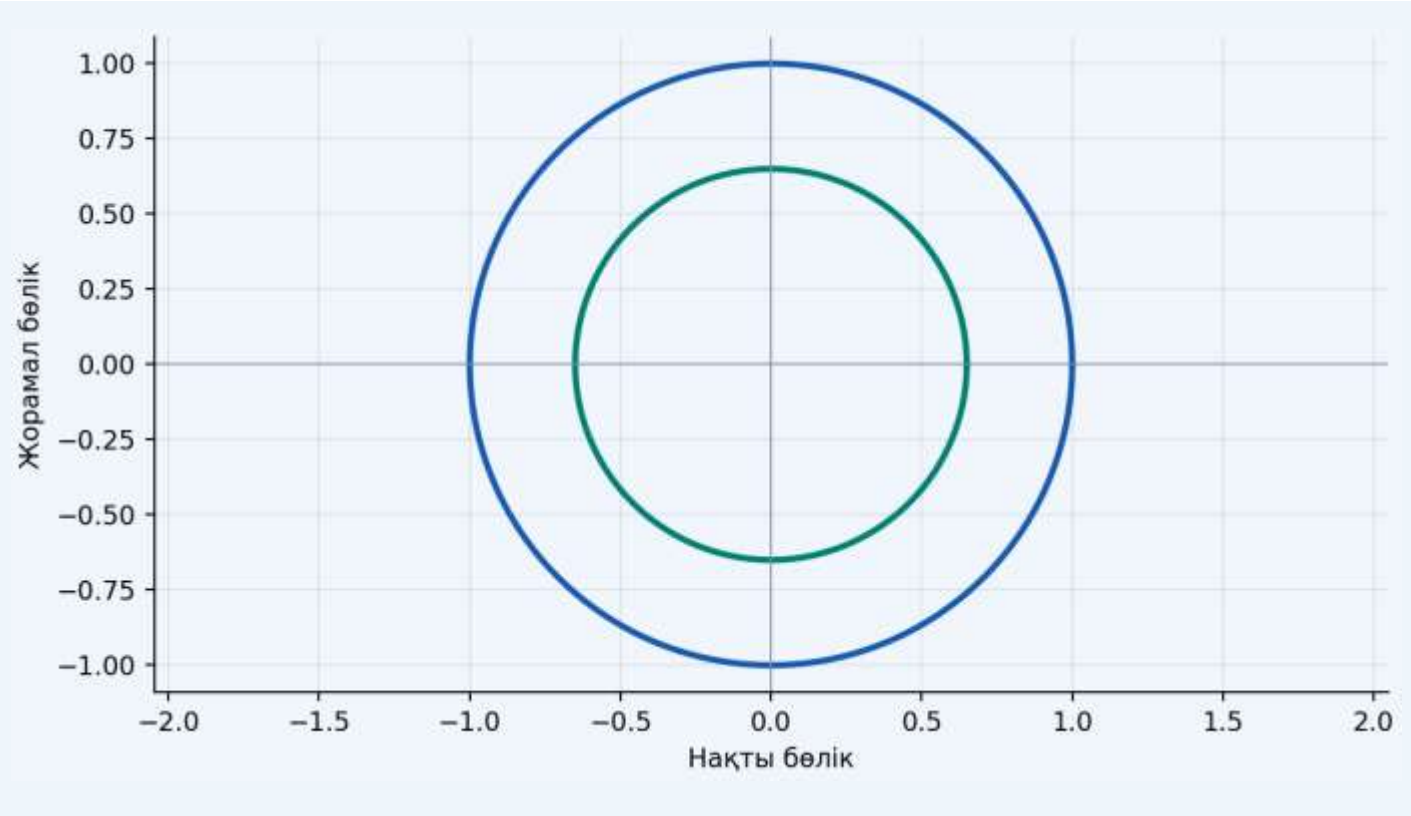
$$e^z = w \neq 0 \Leftrightarrow z = \ln|w| + i(\arg w + 2\pi k)$$

Туынды қатарды қолдану

Геометриялық қатарды туындылатып, индекстерді қайта белгілейміз. Жинақталу радиусы бірге тең.

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

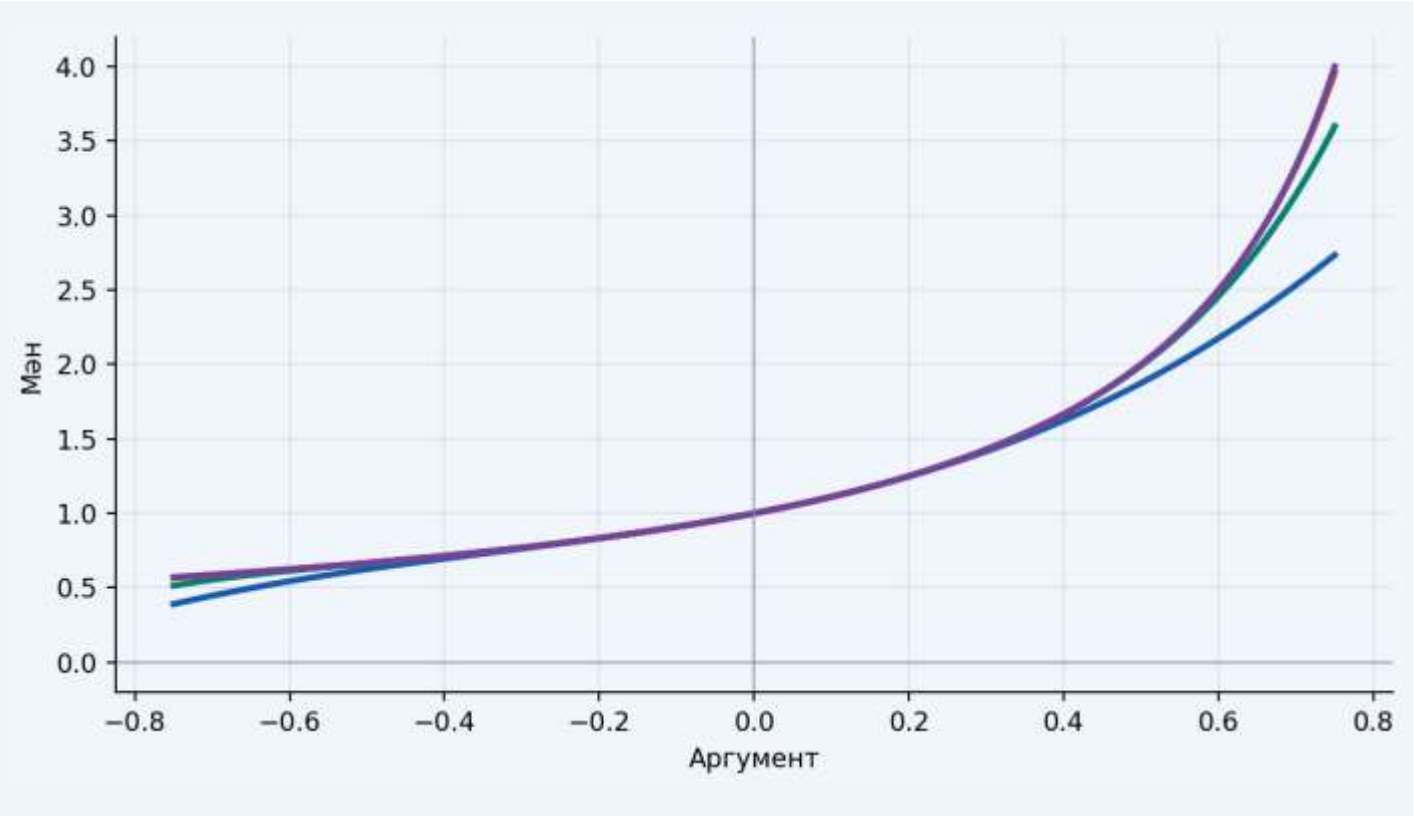
Жинақталу радиусы



Сыртқы шеңбер бірлік радиусын, ішкі шеңбер бірқалыпты жинақталу болатын кіші дөңгелекті көрсетеді.

ГРАФИК

Геометриялық қатардың нақты осьтегі қосындылары



Төрт, сегіз және он алты мүшелі қосындылар 1/(1−x) қисығына жақындайды.

Өздік тапсырма

1 $\sum n! z^n$ және $\sum z^n/n!$ қатарларының радиустарын табыңыз.

2 $e^z = -2$ теңдеуінің барлық шешімін жазыңыз.

3 Синус қатарының алғашқы төрт нөлден өзге мүшесін шығарыңыз.

Қорытынды

1. Түбірлік белгі дәрежелік қатардың жинақталу радиусын береді.

2. Радиус ішіндегі тұйық кіші дөңгелектерде жинақталу бірқалыпты.

3. Экспонента мен тригонометриялық функциялар бүтін функцияларға жалғасады.