КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

11-дәріс

Аргумент қағидасы және бейнелеу қасиеттері

Дәрістің мақсаты

Логарифмдік туынды нөл мен полюс ретін таңбасымен санайды.

Негізгі әдебиет. § 11, 72–79-беттер

Нөл маңындағы логарифмдік туынды

Функцияны нөлдің дәрежесіне және нөлсіз көбейткішке жіктейміз. Туындыны функцияға бөлсек, қарапайым полюс пен голоморфты қосылғыш шығады.

$$\frac{f'}{f} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'}{g}$$

Полюс маңындағы есеп

Дәл сол жіктеуде дәреже теріс. Шегерім полюс ретінің теріс мәніне тең.

$$\frac{f'}{f} = -\frac{m}{z-a} + \frac{g'}{g}$$

Аргумент қағидасының дәлелдеуі

Контурдың ішінде нөлдер мен полюстер ақырлы, шекарада екеуі де жоқ болсын. Шегерімдер теоремасына нөлдер мен полюстердің жергілікті формулаларын қоямыз.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'}{f}\,dz = N - P$$

Бейне контуры

Құрама жолдың логарифмдік туындысын тізбекті ережемен жазамыз. Интеграл бейненің нөлге қатысты индексіне айналады.

$$\operatorname{Ind}_{f\circ C}(0) = N - P$$

Руше теоремасы

Екі функция тұйық дөңгелек маңында голоморфты болсын. Шекарада екінші функцияның модулі бірінші функцияның модулінен кіші болса, бірінші функция мен қосындының нөлдер саны бірдей.

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad z \in C$$

Руше теоремасының дәлелдеуі

Бірінші функциядан қосындыға үздіксіз өтеміз. Шекаралық теңсіздік нөлден өтуді болдырмайды. Аргумент қағидасы бойынша индекс бүтін және параметрге үзіліссіз тәуелді.

$$F_t = f + tg, \quad 0 \le t \le 1$$

Нөлдерді санау мысалы

Бірлік шеңберде кубтық және сызықтық мүшелердің қосындысының модулі екіден аспайды. Тұрақты үш мүшесі үстем, сондықтан дөңгелекте нөл жоқ.

$$|z^3+z|\le 2<3,\quad |z|=1$$

Ашық бейнелеу теоремасы

Тұрақты емес голоморфты функция ашық жиынды ашық жиынға бейнелейді. Бір нүкте маңындағы нөлдің ретін қолданамыз.

$$f(z) - f(a) = (z - a)^m g(z)$$

Ашықтықтың дәлелдеуі

Кіші шеңберде орталық мәнді азайтқан функцияның модулінің минимумы оң. Одан кіші ығысуды Руше теоремасына енгіземіз. Әр жақын мәннің кері бейнесі бар.

$$|w - f(a)| < \min_{|z-a|=r} |f(z) - f(a)|$$

Жергілікті еселік

Сол Руше есебі түбірлердің еселіктерін қоса санағанда m шешім береді. Кіші дөңгелекте туындының өзге нөлдері жоқ болғандықтан, ығысқан мәндер үшін шешімдер бөлек.

Кері функция

Туынды нөлден өзге болса, нақты Якоби анықтауышы оң. Нақты кері функция теоремасын қолданып, айырмалық қатынасты кері аударамыз.

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Инъективтілік және туынды

Егер туынды нөл болса, жергілікті еселік кемінде екі. Жақын мәннің бірнеше бөлек кері бейнесі бар. Демек инъективті голоморфты функцияның туындысы нөл болмайды.

Бұрыштың сақталуы

Қиылысқан екі тегіс қисықтың жанама векторлары бір комплекс санға көбейтіледі. Бұрышқа бірдей шама қосылғандықтан, олардың айырмасы сақталады.

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

Максимум қағидасының салдары

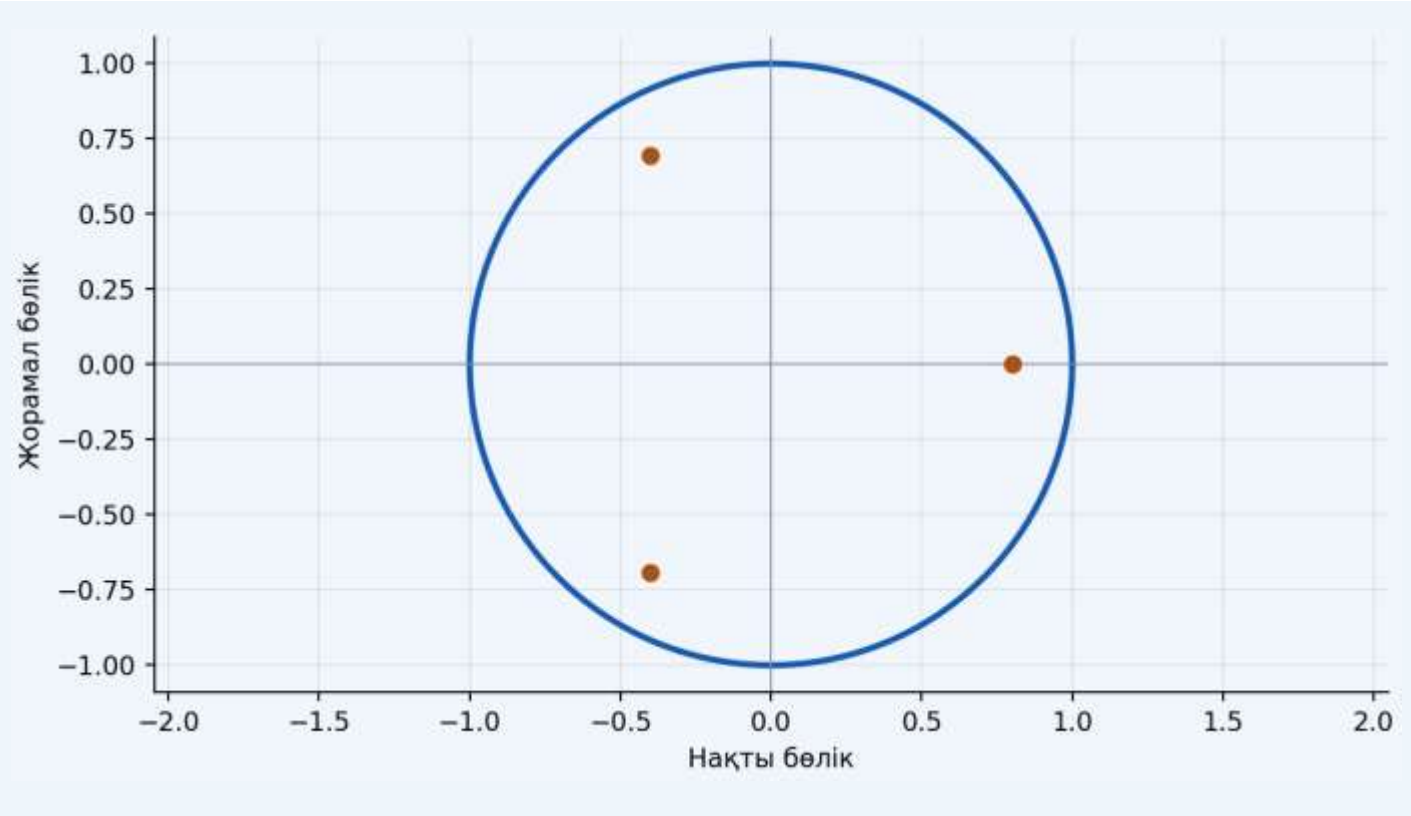
Ішкі максимумда бейне ашық бола алмайды, өйткені кез келген ашық маңайда модулі үлкен мән бар. Сондықтан тұрақты емес функцияның модулі ішкі максимум қабылдамайды.

Шварц леммасының дәлелдеуі

Бірлік дөңгелекті өзіне бейнелейтін функция нөлді бекітсін. Функцияны айнымалыға бөліп, нөлге жалғастырамыз. Радиусы r шеңберде модульді бір бөлінген r арқылы бағалап, r-ді бірге жібереміз. Теңдік болса, максимум қағидасы бойынша бөлінді тұрақты.

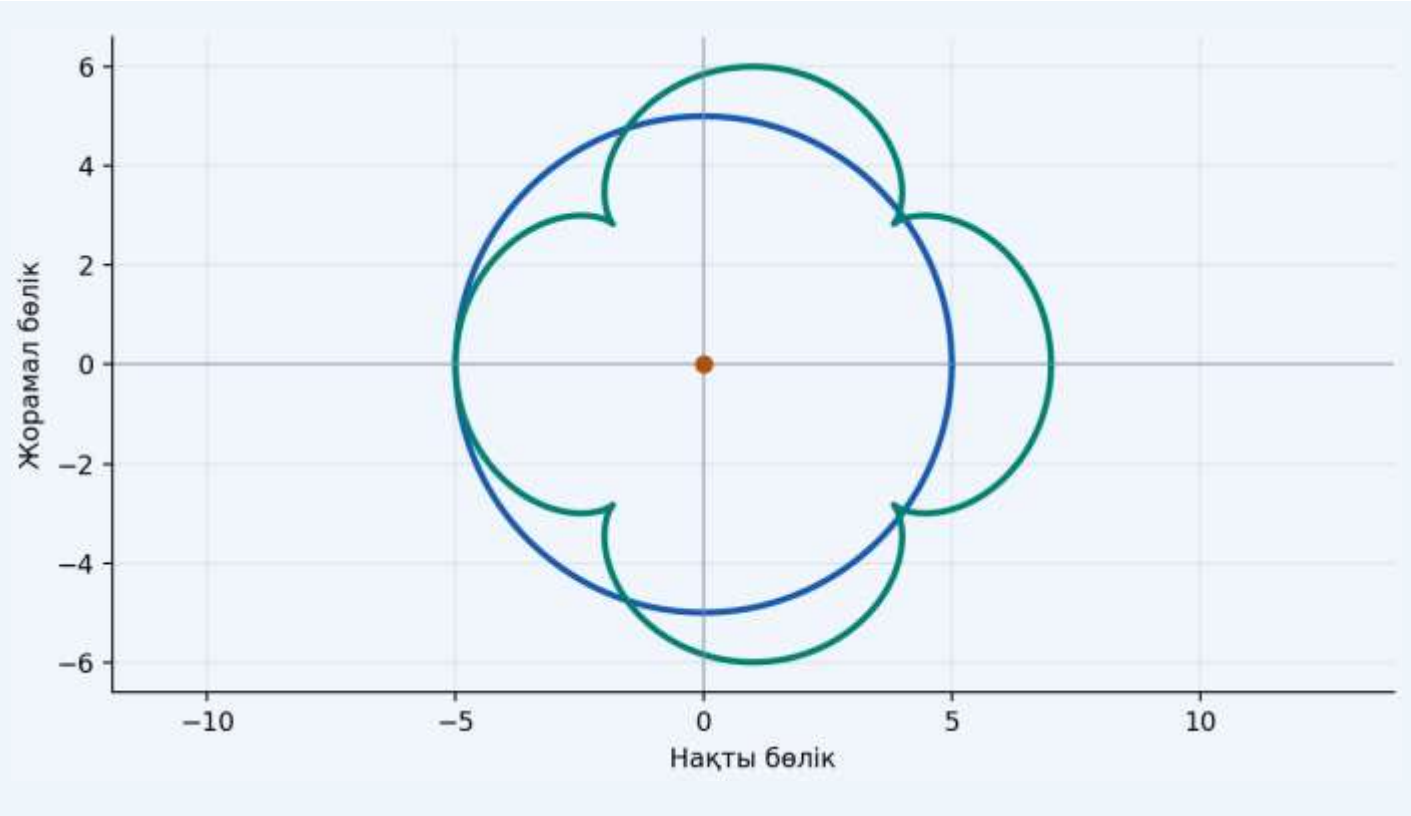
$$|f(z)| \le |z|, \quad |f'(0)| \le 1$$

Үшінші дәрежелі бейнелеу



Бірлік шеңбердің ішіндегі таңдалған нөлден өзге мәннің үш кері бейнесі бар.

Руше теоремасындағы деформация



5z және $5z+1+z^5$ бейне контурлары нөлден өтпей бір-біріне деформацияланады.

Өздік тапсырма

1 $|z|<1$ ішінде z^5+5z+1 көпмүшесінің нөлдерін санаңыз.

2 z^3 функциясының нөл маңындағы еселігін түсіндіріңіз.

3 Бірлік дөңгелектің нөлді бекітетін автоморфизмдері бұрылулар екенін дәлелдеңіз.

Қорытынды

1 Логарифмдік туынды нөл мен полюс ретін таңбасымен санайды.

2 Руше теоремасы шекаралық бағадан нөлдер санын анықтайды.

3 Жергілікті еселік ашық бейнелеу мен инъективтілікті түсіндіреді.