КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

7-дәріс

Айналу индексі және Кошидің жалпы теоремасы

Дәрістің мақсаты

Индекс нүктені ораудың таңбалы санын өлшейді.

Негізгі әдебиет. § 7, 38–46-беттер

Аргументтің үздіксіз өсімшесі

Жол нөлден өтпесе, оның бойында аргументті үздіксіз таңдауға болады. Бастапқы мәнді таңдаған соң, көршілес қысқа бөліктердегі аргументтерді үйлестіреміз.

$$\gamma(t) - a = \rho(t)e^{i\theta(t)}$$

Индекс анықтамасы

Тұйық жолдың бастапқы және соңғы бағыттары бірдей. Үздіксіз бұрыштың толық өсімшесі толық айналымға еселі.

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

Интегралдық өрнектің дәлелдеуі

Логарифмдік туындыны параметр бойымен жіктейміз. Радиустың логарифмі тұйық жолда бастапқы мәніне қайтады.

$$\frac{\gamma'}{\gamma - a} = \frac{\rho'}{\rho} + i\theta', \qquad \mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

Бағдар және еселік

Жолды кері өткенде бұрыш өсімшесі таңбасын өзгертеді. Бір жолды бірнеше рет жүрсек, индекстер қосылады.

$$\mathrm{Ind}_{-\gamma}(a) = -\mathrm{Ind}_{\gamma}(a)$$

Индекстің жергілікті тұрақтылығы

Ядро жолдан алыс нүктеде параметрге үздіксіз тәуелді. Бүтін мәнді үзіліссіз функция толықтауыштың әр байланысқан бөлігінде тұрақты.

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) \longrightarrow 0, \quad |a| \to \infty$$

Қарапайым шеңбердің индексі

Центрде параметрлеу бір толық оң айналымды береді. Сыртқы аймақ байланысқан әрі шексіз болғандықтан, индекс онда нөл.

$$\mathrm{Ind}_{|z|=R}(a) = 1 \ (|a|<R), \quad 0 \ (|a|>R)$$

Цикл

Бағытталған тұйық жолдардың бүтін коэффициентті ақырлы қосындысы цикл деп аталады. Интеграл мен индекс сызықтық түрде жалғасады.

$$\Gamma = \sum_j n_j \gamma_j$$

Гомологиялық шарт

Облыстан тыс кез келген нүктеге қатысты индекс нөл болса, цикл осы облыста нөлге гомологиялы. Сақина шекарасында ішкі шеңбердің бағдары теріс.

$$\Gamma = C_R - C_r$$

Кошидің жалпы теоремасы

Облыста голоморфты функцияның нөлге гомологиялы цикл бойынша интегралы нөл. Дәлел көпбұрыштық алмастырудан басталады.

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

Көпбұрыштық алмастыру

Жолды ұсақ бөліктерге бөлеміз. Әр бөлік пен оның хордасын облыс ішіндегі бір дөңгелекке орналастырамыз. Жергілікті алғашқы функция олардың интегралдарын теңестіреді. Индекс те осындай алмастыруда сақталады.

Циклді үшбұрыштарға жіктеу

Көпбұрыштың қабырғалары жазықтықты бөліктерге бөледі. Әр бөліктің шекарасына сол бөліктегі индексті коэффициент етіп қоямыз. Қабырғадан өткендегі индекс секірісі оның бағдарланған еселігіне тең, сондықтан шекаралар қосындысы циклді қайта береді.

Дәлелдеудің аяқталуы

Индексі нөлден өзге бөліктің іші облыста жатады. Қабырғалары бастапқы көпбұрышта. Осы бөліктерді үшбұрыштарға бөліп, әр үшбұрыштың шекарасына Гурса леммасын қолданамыз.

Жалпы Коши формуласы

Нүктедегі мәнді алымнан азайтамыз. Пайда болған бөлінген айырма нүктеде голоморфты жалғасады. Оның интегралы жалпы теорема бойынша нөл, ал тұрақты мүшеге индекс анықтамасын қолданамыз.

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i \operatorname{Ind}_{\Gamma}(a) f(a)$$

Сақинадағы екі шеңбер

Сақинада голоморфты функцияның екі оң бағдарланған шеңбер бойынша интегралдары тең. Олардың айырмасы сақинада нөлге гомологиялы.

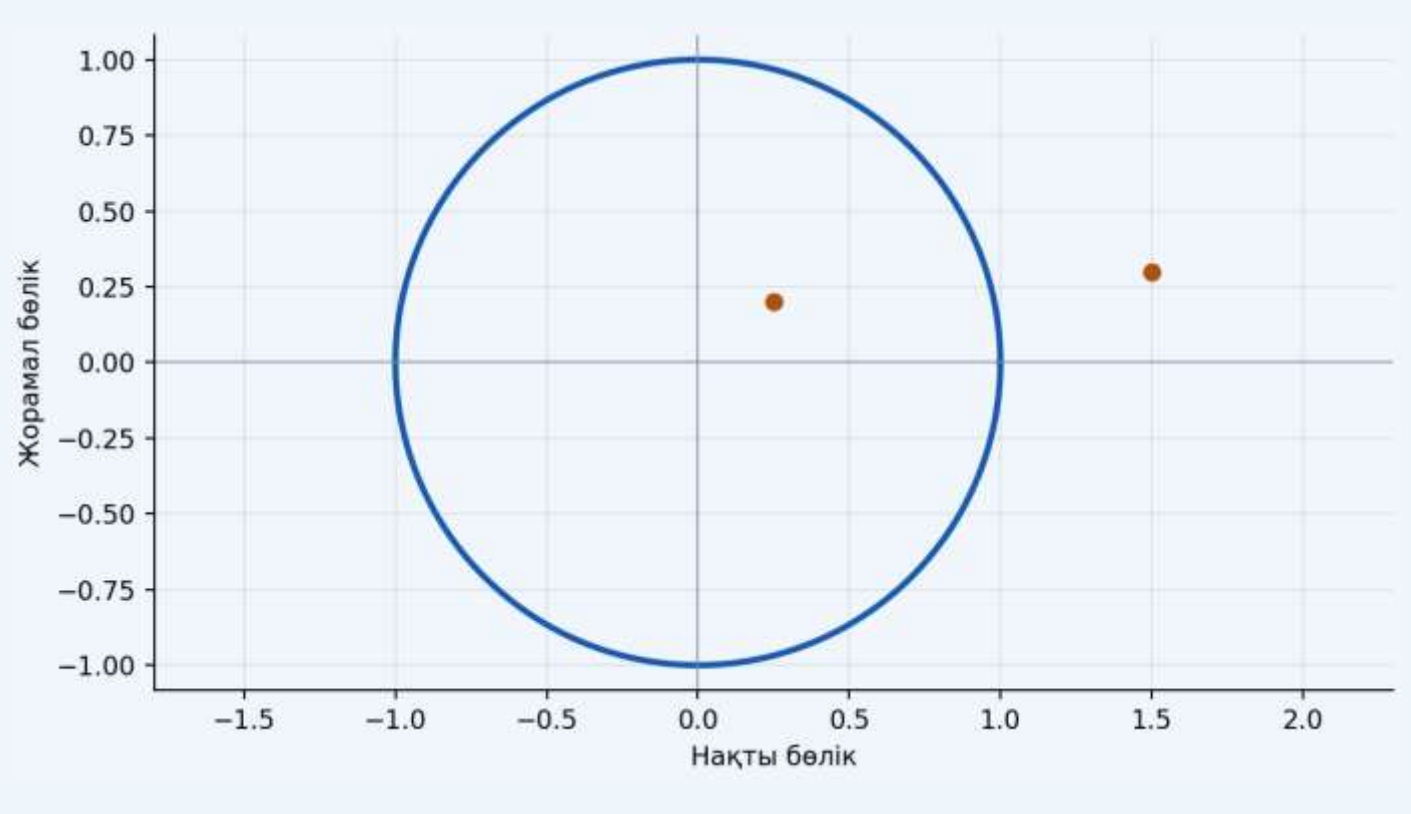
$$\oint_{C_{r_2}} f\,dz = \oint_{C_{r_1}} f\,dz$$

Екі рет айналу мысалы

Жол центрді екі рет оң бағытта орайды. Жалпы формула интегралға екі еселік көбейткіш енгізеді.

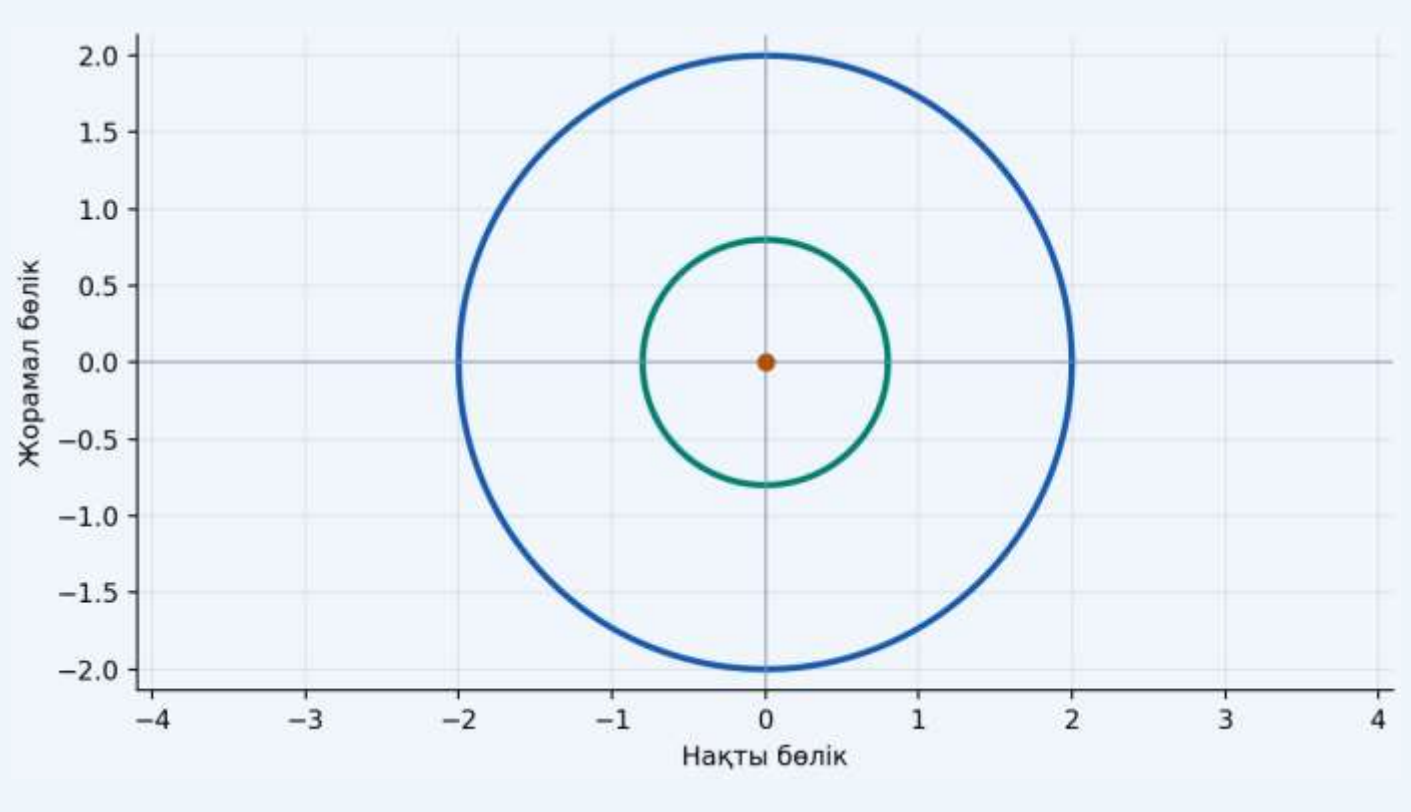
$$\gamma(t) = e^{2it}, \quad \oint_{\gamma} e^{z}\,\frac{dz}{z} = 4\pi i$$

Орау индексі және шеңбер



Ішкі белгі үшін индекс бір, ал сыртқы белгі үшін нөл.

Сақина шекарасының екі бөлігі



Сыртқы контур оң, ішкі контур теріс бағытпен алынады. Ішкі тесік үшін индекстер қысқарады.

Өздік тапсырма

1. Бірлік шеңбер мен радиусы екі шеңбердің айырмасы үшін индексті әр бөлікте табыңыз.

2. $\gamma(t)=2+e^{-3it}$ жолының 2 нүктесіне қатысты индексін есептеңіз.

3. Нөлге гомологиялық шартты сақина үшін түсіндіріңіз.

Қорытынды

1. Индекс нүктені ораудың таңбалы санын өлшейді.
2. Гомологиялық шарт Коши теоремасын көп байланысқан облыстарға қолдануға мүмкіндік береді.
3. Жалпы интегралдық формулада индекс көбейткіш болады.