КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

2-дәріс

Комплекс туынды және Коши–Риман шарттары

Дәрістің мақсаты

Комплекс туындының болуы өсімшенің бағытына тәуелсіз шекті талап етеді.

Негізгі әдебиет. § 2, 8–15-беттер

Комплекс функция

Функцияны екі нақты функция арқылы жіктейміз. Оның мәні жазықтықтағы екінші бір нүктені анықтайды.

$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

Шек пен үзіліссіздік

Комплекс шек екі нақты құрамдастың бір мезгілде шекке ұмтылуымен парапар.

$$|f(z)-L|^2=(u-\operatorname{Re}L)^2+(v-\operatorname{Im}L)^2$$

Комплекс туынды

Айырымдық қатынас өсімше кез келген бағыттан нөлге ұмтылғанда бірдей шекке келуі керек.

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Нақты бағыттағы қатынас

Өсімшені нақты оське параллель алғанда, қатынас екі нақты функцияның бірінші айнымалы бойынша дербес туындыларын береді.

$$f'(z) = u_x + iv_x$$

Жорамал бағыттағы қатынас

Өсімшені жорамал оське параллель аламыз. Жорамал бірлікке бөлу өрнектің бөліктерін ауыстырады.

$$f'(z) = \frac{u_y + iv_y}{i} = v_y - iu_y$$

Коши–Риман шарттарының қажеттілігі

Екі бағытта алынған шектер тең. Нақты және жорамал бөліктерді жеке салыстырамыз.

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

Жеткілікті шарт

Нақты мағынада дифференциалданатын екі құрамдас Коши–Риман шарттарын қанағаттандырса, функция сол нүктеде комплекс туындыға ие.

$$\Delta f = (u_x + iv_x)\Delta x + (u_y + iv_y)\Delta y + o(|\Delta z|)$$

Жеткілікті шарттың дәлелдеуі

Шарттарды нақты дифференциалға қоямыз. Сызықтық бөлік комплекс өсімшеге көбейтілген бір санға айналады. Өсімшеге бөлгенде қалдық нөлге ұмтылады.

$$\Delta f = (u_x + iv_x)\Delta z + o(|\Delta z|)$$

Голоморфтылық

Ашық жиынның әр нүктесінде комплекс туындысы бар функция сол жиында голоморфты. Бүкіл жазықтықта голоморфты функцияны бүтін функция дейміз.

$$f(z)=z^n,\quad f'(z)=nz^{n-1}$$

Түйіндестірудің туындысы

Нақты бағыт бойынша қатынас бірге, жорамал бағыт бойынша минус бірге тең. Ортақ шек ешбір нүктеде шықпайды.

$$\frac{\overline{h}}{h} = 1 \ (h \in \mathbb{R}), \qquad \frac{\overline{h}}{h} = -1 \ (h \in i\mathbb{R})$$

Нүктеде шарттардың орындалуы

Берілген функцияның нөлдегі барлық дербес туындылары нөл. Диагональ бойындағы айырымдық қатынас нөлден өзге тұрақты, сондықтан нақты дифференциалдану жорамалы маңызды.

$$f(x+iy)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\ (z\neq 0),\quad f(0)=0$$

Тізбекті ереже

Екі функцияның бірінші ретті өсімшелерін бірінің ішіне бірін қоямыз. Қалдықтардың өсімшеге қатынасы нөлге кетеді.

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

Якоби анықтауышы

Коши–Риман теңдіктерін нақты Якоби матрицасына қойып, оның анықтауышын есептейміз.

$$J_f = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

Гармониялық құрамдастар

Екінші ретті дербес туындылар үзіліссіз болса, Коши–Риман шарттарын дифференциалдап, аралас туындыларды қысқартамыз.

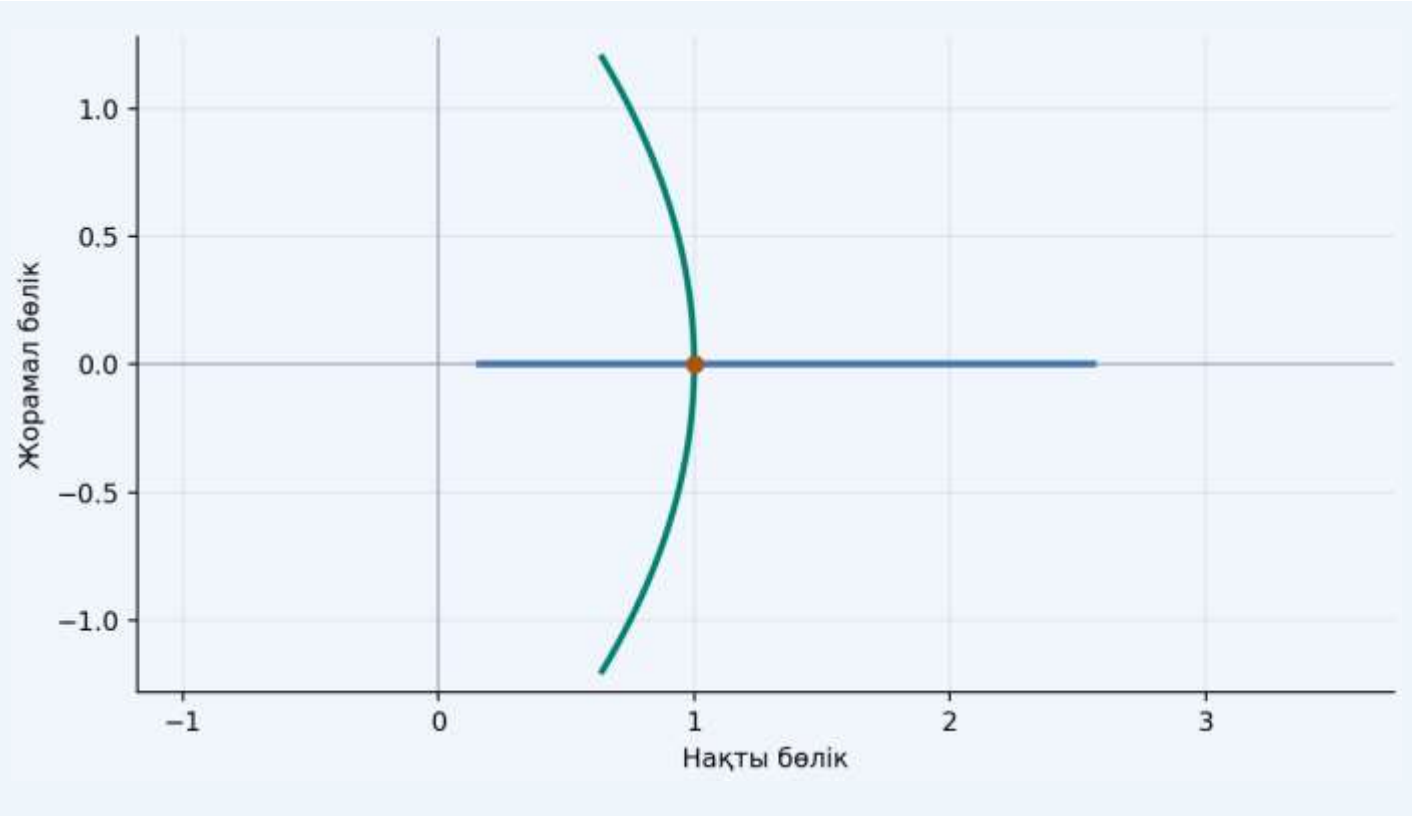
$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

Түйіндес гармониялық функция

Берілген нақты бөлікке сәйкес жорамал бөлікті Коши–Риман шарттарынан табамыз. Мысалда бірінші теңдік бойынша интегралдап, екінші теңдікпен еркін мүшені анықтаймыз.

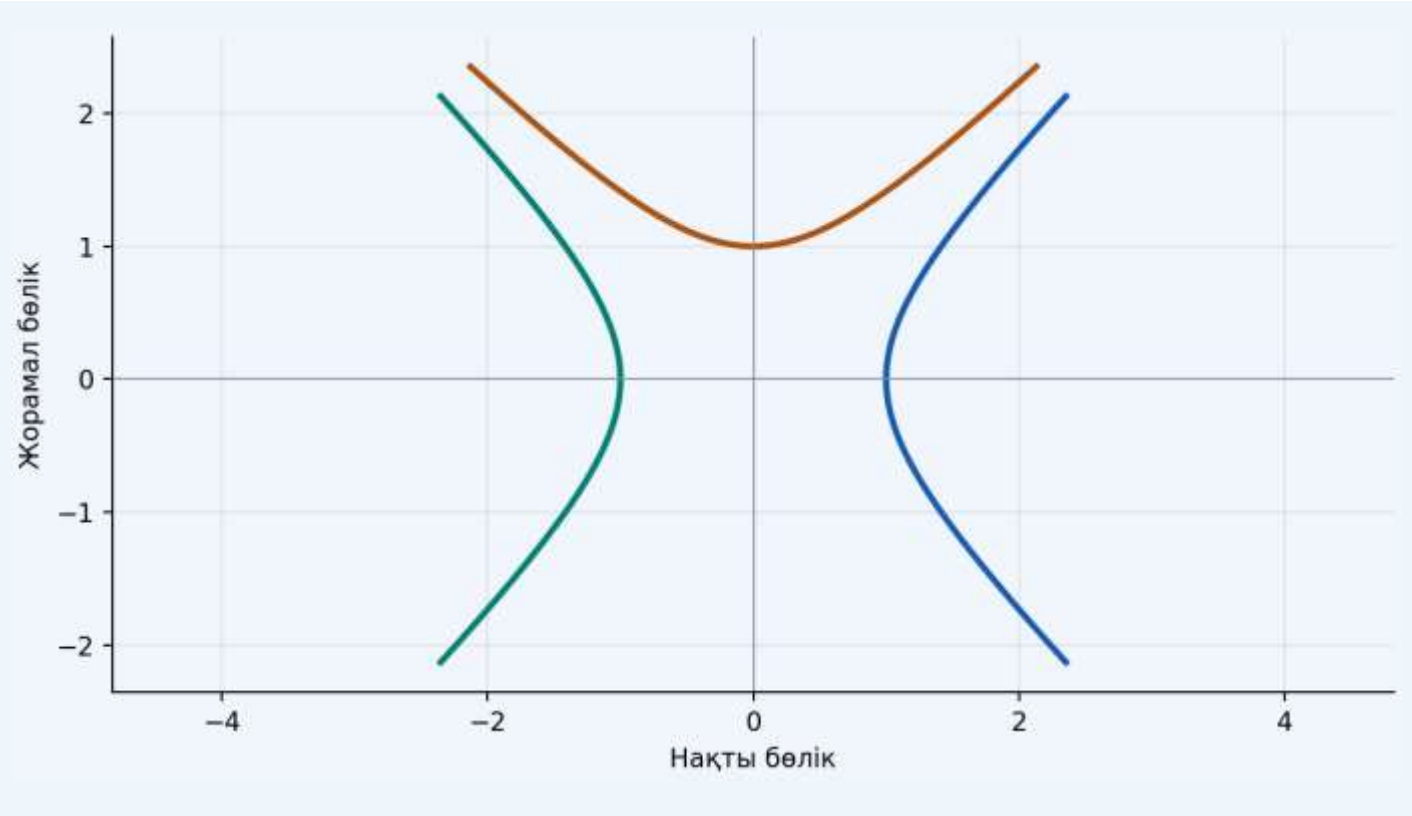
$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy + C$$

Квадраттау және жанамалар



z=1 нүктесінен өтетін перпендикуляр сызықтардың бейнелері де тік бұрышпен қиылысады.

Гармониялық функцияның деңгей сызықтары



$u=x^2-y^2$ функциясы үшін оң деңгейлер оңға және солға ашылады.

Өздік тапсырма

1 z^2+iz функциясы үшін Коши–Риман теңдіктерін тексеріңіз.

2 $f(z)=|z|^2$ функциясының қай нүктеде туындысы барын табыңыз.

3 $u=e^x \cos y$ үшін түйіндес гармониялық функцияны табыңыз.

Қорытынды

1. Комплекс туындының болуы өсімшенің бағытына тәуелсіз шекті талап етеді.

2. Коши–Риман шарттары нақты дифференциалданумен бірге жеткілікті.

3. Нөлден өзге туынды жергілікті бұрылу мен масштабтауды сипаттайды.