КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

8-дәріс

Лоран қатары және оқшау ерекше нүктелер

Дәрістің мақсаты

Лоран қатарының екі бөлігі екі контурдан шығады.

Негізгі әдебиет. § 8, 46–52-беттер

Сақинадағы жіктеу

Сақинада голоморфты функцияның жіктелуінде оң және теріс дәрежелер қатар жүреді.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

Екі контур формуласы

Нүктені ішкі және сыртқы шеңберлер арасына орналастырамыз. Ішкі шекараның теріс бағдары екі интеграл айырмасын береді.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{C_2}-\oint_{C_1}\right)\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

Сыртқы контурдың үлесі

Сыртқы шеңберде нүкте ығысуының контур радиусына қатынасы бірден кіші. Геометриялық қатар оң дәрежелер береді.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

Ішкі контурдың үлесі

Ішкі шеңберде кері қатынасты қолданамыз. Контур алдындағы теріс таңба ядроның теріс таңбасымен қысқарады.

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}}$$

Лоран коэффициенттері

Тұйық ішкі сақинада екі геометриялық қатар бірқалыпты жинақталады. Мүшелеп интегралдаймыз. Шеңбер радиусын өзгерту коэффициентті өзгертпейді.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta$$

Жіктелудің жалғыздығы

Қатарды таңдалған дәрежеге бөліп, шеңбер бойымен интегралдаймыз. Бірінші теріс дәрежеден басқа дәрежелердің интегралы нөл.

$$\oint_{C_\rho} (\zeta - a)^k \, d\zeta = 2\pi i \ (k = -1), \quad 0 \ (k \neq -1)$$

Екі түрлі сақина

Бір функцияның центрі бірдей болғанымен, жіктелуі таңдалған сақинаға тәуелді. Ішкі жағдайда оң, сыртқы жағдайда теріс дәрежелер шығады.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ (|z|<1), \qquad -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \ (|z|>1)$$

Оқшау ерекше нүкте

Функция центрді алып тастаған кіші дөңгелекте голоморфты болса, центр оқшау ерекше нүкте болады.

$$0 < |z - a| < R$$

Жойылатын ерекшелік

Барлық теріс коэффициент нөл болса, Тейлор қатары центрге голоморфты жалғасады. Кері бағыт жалғыздық арқылы шығады.

$$f(a) = a_0$$

Риманның жою теоремасы

Функция тесілген маңайда шектелсін. Теріс коэффициентті кіші шеңбер арқылы бағалаймыз. Радиус нөлге кеткенде бағасы нөл болады.

$$|a_{-m}| \leq M\rho^m \longrightarrow 0, \quad m \geq 1$$

Полюс және оның реті

Теріс дәрежелер саны ақырлы және ең төменгі дәреже минус m болса, сол дәрежені жақша сыртына шығарамыз. Қалған голоморфты көбейткіштің центрдегі мәні нөлден өзге.

$$f(z) = (z-a)^{-m} g(z), \quad g(a) \neq 0$$

Полюстің шектік белгісі

Полюсте модуль шексіз өседі. Керісінше, модуль шексіз өссе, кері функция тесілген маңайда голоморфты және нөлге жалғасады. Оның нөлінің реті полюс ретін береді.

$$1/f(z) = (z-a)^m h(z)$$

Елеулі ерекше нүкте

Теріс коэффициенттер шексіз көп болса, ерекшелік елеулі. Экспонентаның қатарында барлық теріс дәрежелер кездеседі.

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

Казорати–Вейерштрасс теоремасының дәлелдеуі

Мәндер бір ашық дөңгелекке түспесін. Сол дөңгелектің центрін функциядан азайтып, кері шама аламыз. Ол шектелген және центрге жалғасады. Жалғасқан мән нөл болса полюс, нөлден өзге болса жойылатын ерекшелік шығады.

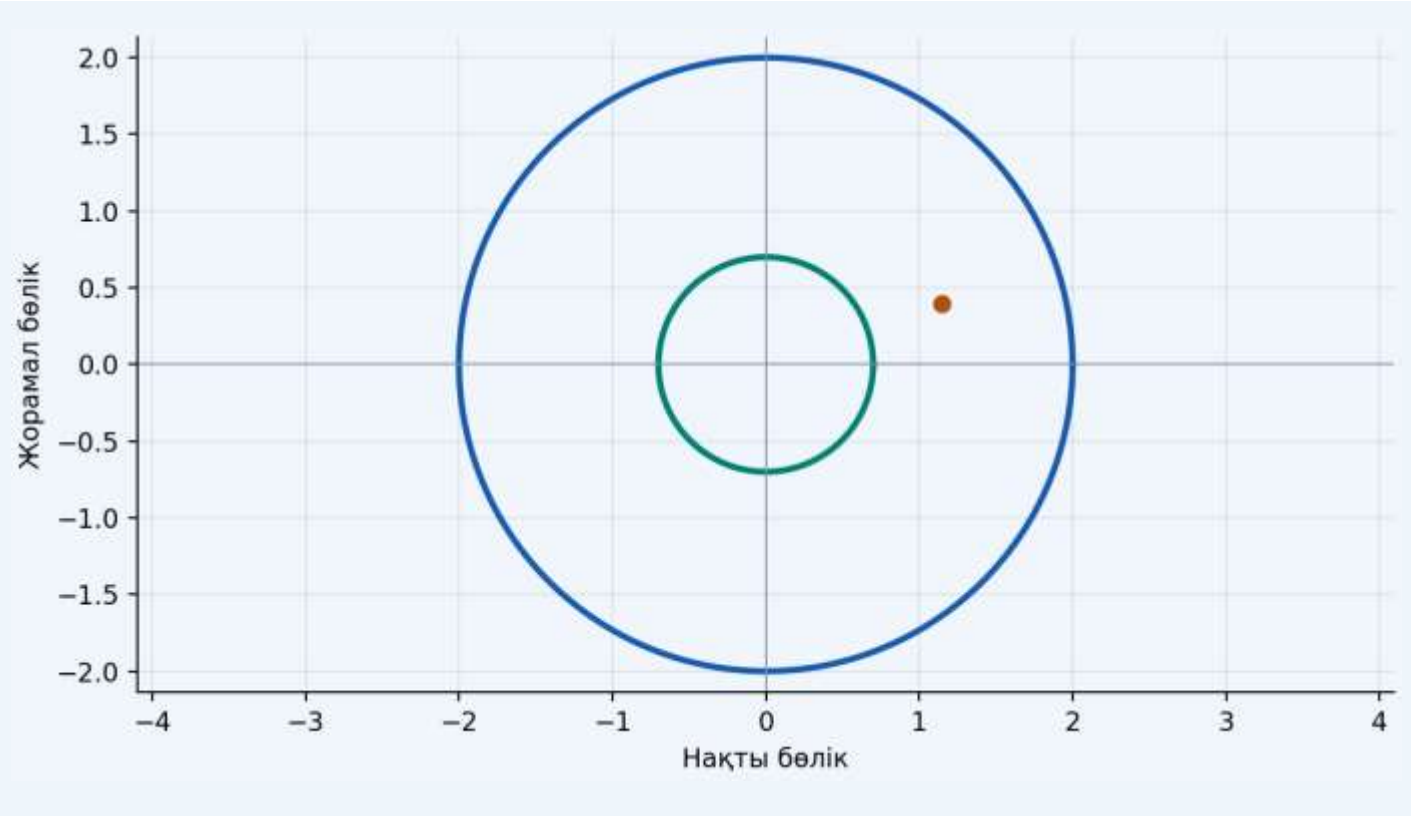
$$g(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

Шексіздіктегі ерекшелік

Жаңа айнымалы ретінде кері шаманы аламыз. Мысалда шексіздік екінші ретті полюс болады.

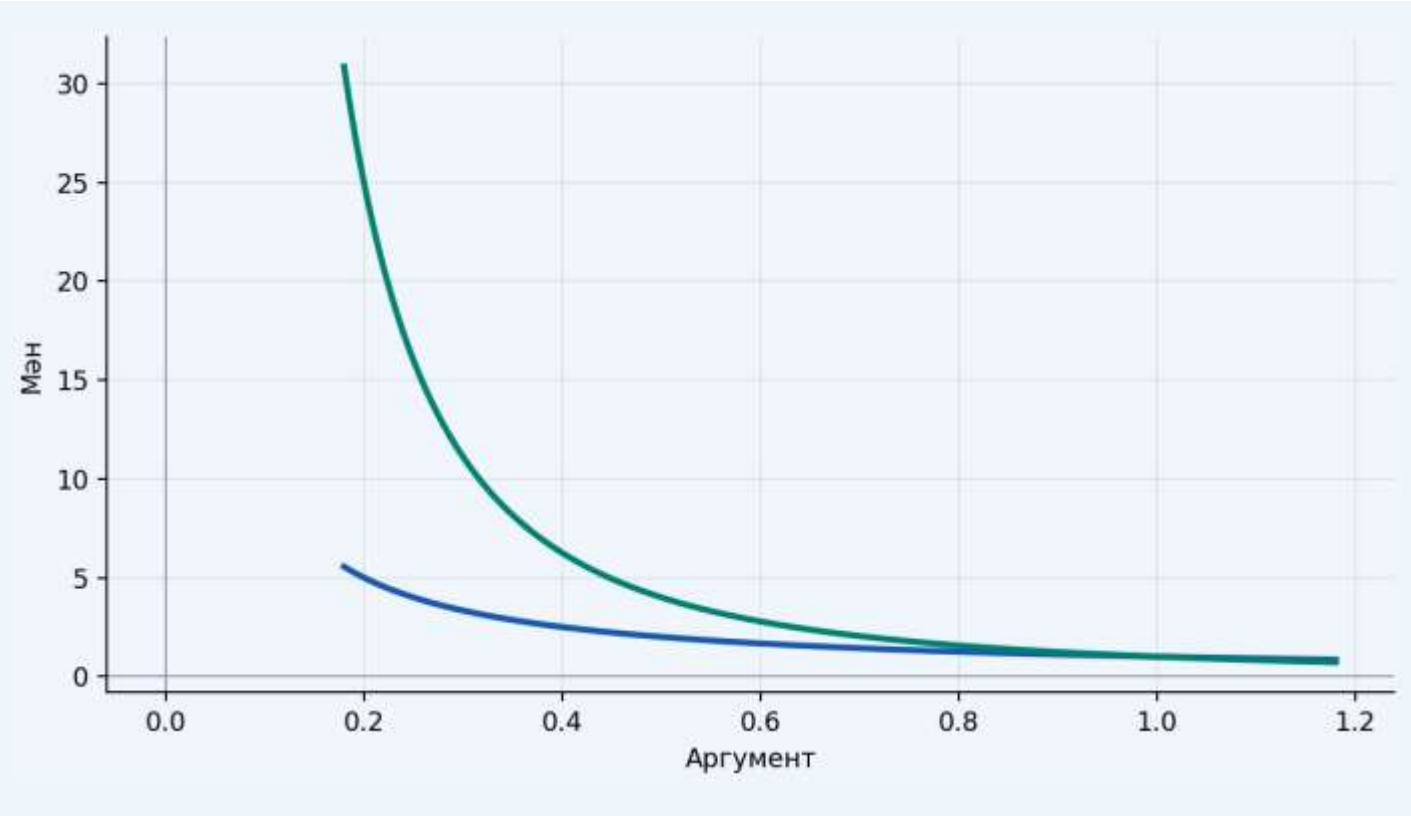
$$f(z)=z^2+1, \qquad f(1/w)=w^{-2}+1$$

Лоран жіктеуінің контурлары



Белгіленген нүкте ішкі және сыртқы интегралдау шеңберлерінің арасында жатыр.

Полюс маңындағы өсу



Оң нақты осьте 1/x және $1/x^2$ модульдері салыстырылған. Екінші ретті полюс тезірек өседі.

Өздік тапсырма

1 1/[z(z−2)] функциясын 0<|z|<2 және |z|>2 облыстарында жіктеңіз.

2 sin z/z және sin(1/z) функцияларының нөлдегі ерекшелігін жіктеңіз.

3 1/(z−1)² функциясының шексіздіктегі ерекшелігін табыңыз.

Қорытынды

1. Лоран қатарының екі бөлігі екі контурдан шығады.
2. Теріс дәрежелердің саны ерекшеліктің түрін анықтайды.
3. Шектелген оқшау ерекшелік жойылады.