КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

9-дәріс

Шегерімдер және интегралдарды есептеу

Дәрістің мақсаты

Шегерім Лоран қатарының бір ғана коэффициентіне тең.

Негізгі әдебиет. § 9, 52–63-беттер

Шегерім анықтамасы

Оқшау ерекше нүктедегі шегерім Лоран қатарының минус бірінші дәрежесінің коэффициенті.

$$\operatorname{Res}_{z=a} f = a_{-1}$$

Кіші шеңбер формуласы

Лоран қатары шеңбер бойында бірқалыпты жинақталады. Мүшелеп интегралдау тек минус бірінші дәрежені сақтайды.

$$\oint_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a} f$$

Шегерімдер теоремасы

Оң бағдарланған қарапайым контурдың ішінде оқшау ерекше нүктелер саны ақырлы болсын. Контурдың өзінде ерекше нүкте жатпасын.

$$\oint_C f\,dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{z=a_j} f$$

Теореманың дәлелдеуі

Әр ерекшелік айналасынан қиылыспайтын кіші дөңгелек алып тастаймыз. Қалған облыста сыртқы контур мен теріс бағдарланған кіші контурлар Коши теоремасын қанағаттандырады. Кіші шеңберлерге коэффициент формуласын қолданамыз.

Қарапайым полюс

Бірінші дәрежелі көбейткіш Лоран қатарының бас мүшесін тұрақтыға айналдырады. Центрдегі шек шегерімді береді.

$$\operatorname{Res}_{z=a} f = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

Бөліндідегі қарапайым нөл

Бөлімді бірінші ретті Тейлор жіктеуімен жазамыз. Алым центрде нөлден өзге, бөлім туындысы да нөлден өзге болсын.

$$\operatorname{Res}_{z=a} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

Жоғары ретті полюс

Полюс дәрежесіне көбейткен соң голоморфты функция аламыз. Оның Тейлор қатарының тиісті коэффициенті бастапқы шегерімге тең.

$$\operatorname{Res}_{z=a} f = \frac{1}{(m-1)!}\left[((z-a)^m f(z))^{(m-1)}\right]_{z=a}$$

Екінші ретті полюс мысалы

Экспонентаның бірінші туындысын нүктеде аламыз. Сол мән Лоран қатарындағы кері бірінші дәреже алдында тұрады.

$$\operatorname{Res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2} = e$$

Елеулі нүктедегі шегерім

Синустың тақ дәрежелі қатарында кері бірінші дәреженің коэффициентін тікелей оқимыз.

$$\operatorname{Res}_{z=0} \sin(1/z) = 1$$

Шексіздіктегі шегерім

Кері айнымалыға көшкенде дифференциал теріс таңба мен екінші кері дәрежені береді.

$$\operatorname{Res}_{\infty} f = -\operatorname{Res}_{w=0} \frac{f(1/w)}{w^2}$$

Нақты интегралға контур таңдау

Нақты кесіндіні жоғарғы жарты шеңбермен тұйықтаймыз. Доғада функция модулі радиустың квадратына кері, ал доға ұзындығы радиусқа тура пропорционал.

$$|1+z^2| \geq R^2 - 1, \quad |z| = R$$

Нақты интегралды есептеу

Жоғарғы жарты жазықтықта жалғыз полюс жорамал бірлікте. Оның шегерімі бір бөлінген екі жорамал бірлікке тең. Доғаның үлесі нөлге кетеді.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

Тригонометриялық интеграл

Бірлік шеңбер параметрін қойып, синус пен косинусты рационал өрнекке айналдырамыз. Контурдың ішіндегі полюстерді ғана есепке аламыз.

$$z = e^{it}, \quad \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

Тригонометриялық мысал

Бөлімнің түбірлері минус екі плюс немесе минус түбір үш. Бірлік дөңгелекте біреуі ғана жатады. Бөлім туындысы сол нүктеде екі түбір үшке тең.

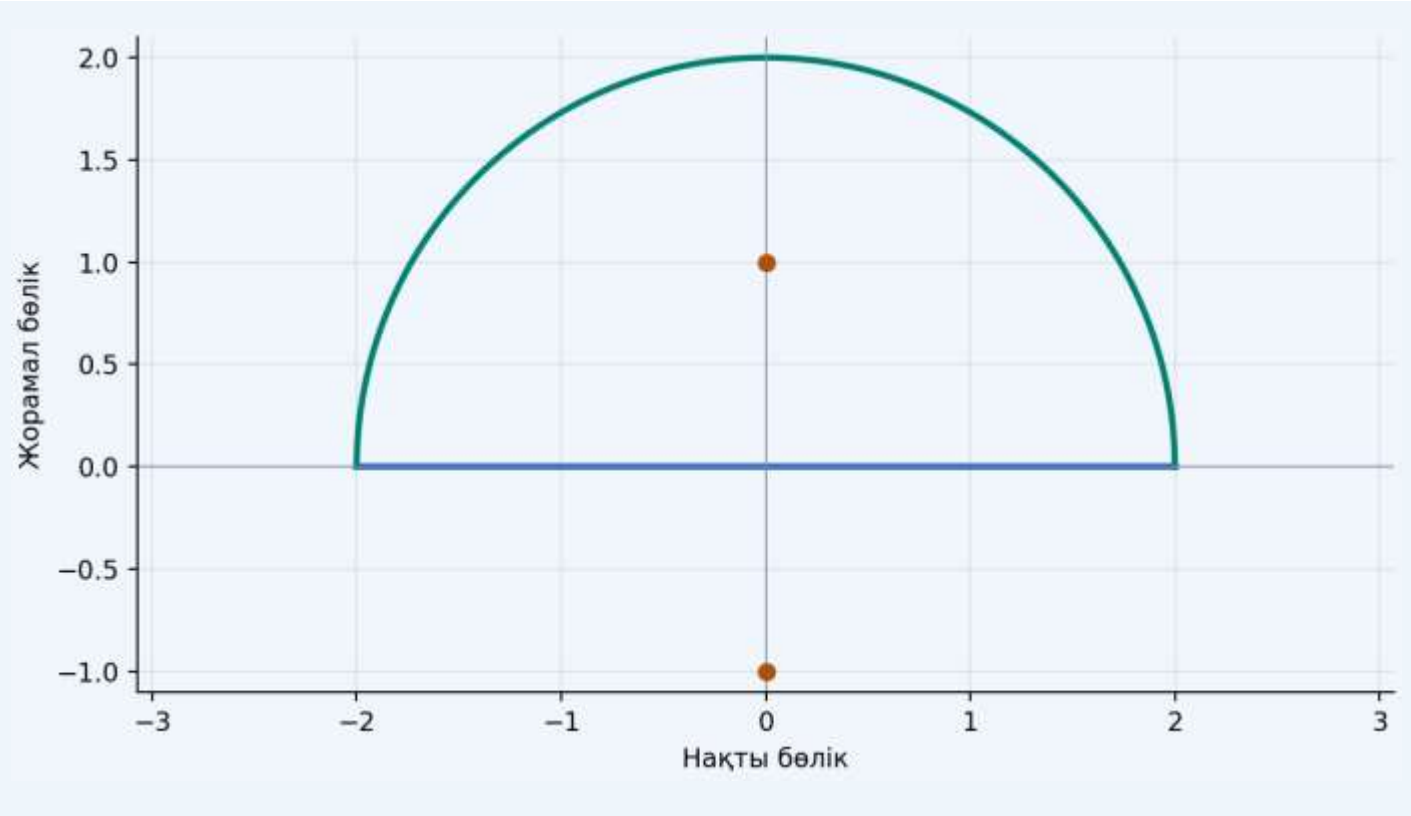
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Жордан бағасы

Оң жиілікте экспонента жоғарғы жарты жазықтықта бәсеңдейді. Бірінші жарты аралықта синусты сызықтық төменгі бағамен шектеп, екінші жартысын симметриямен бағалаймыз.

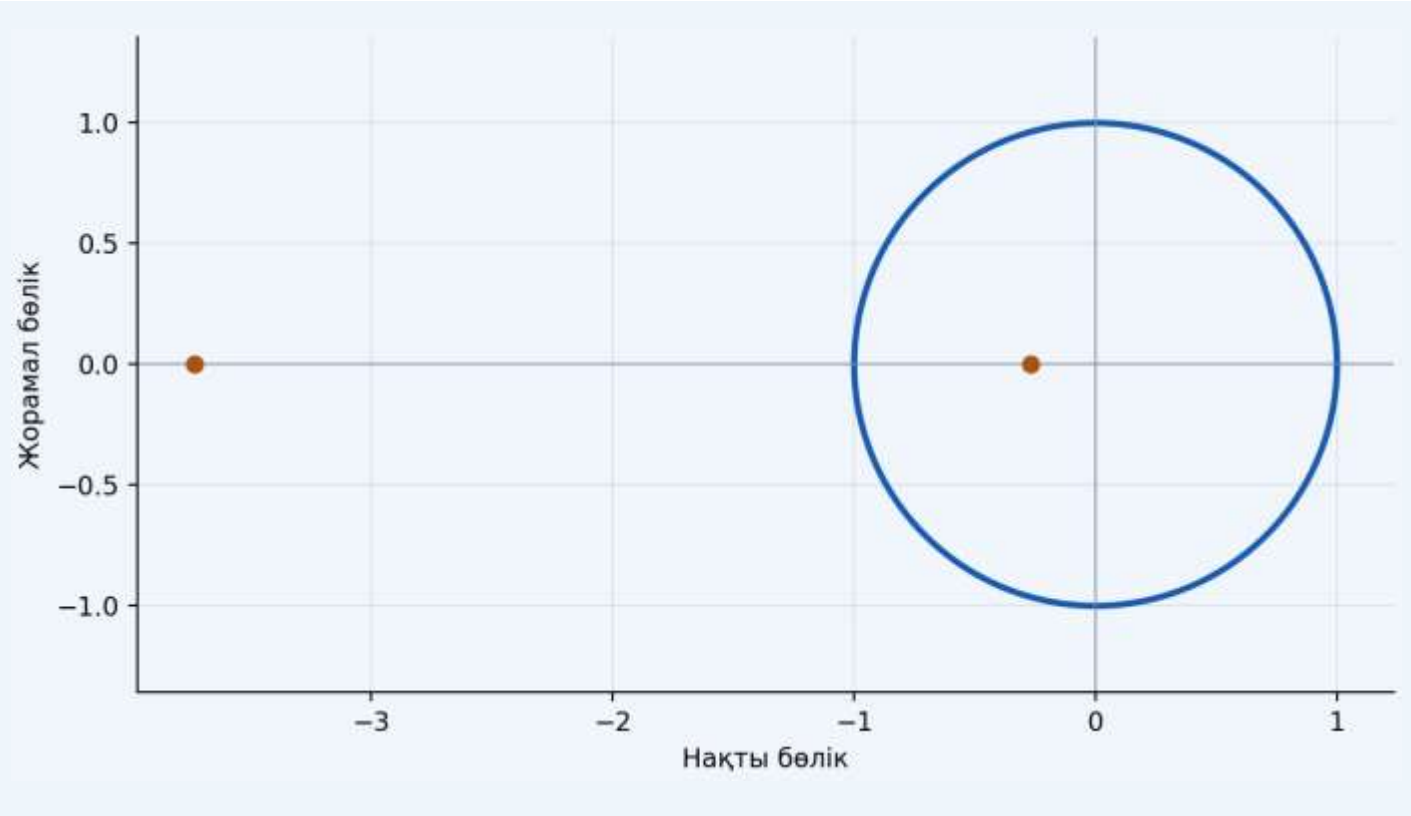
$$\int_0^{\pi} e^{-aR\sin t}\,dt \le \frac{\pi}{aR}, \quad a>0$$

Жоғарғы жарты шеңберлі контур



1/(1+z²) функциясының і полюсі контурдың ішінде, −і полюсі сыртында.

Бірлік шеңбер және бөлім түбірлері



z^2+4z+1 көпмүшесінің екі түбірінің тек біреуі бірлік дөңгелекте жатады.

Өздік тапсырма

1 e^z/z^3 функциясының нөлдегі шегерімін табыңыз.

2 Нақты ось бойынша $1/(x^4+1)$ интегралын шегерімдер арқылы есептеңіз.

3 Бірлік шеңберге көшу арқылы $1/(3+\cos t)$ функциясының периодтық интегралын табыңыз.

Қорытынды

1. Шегерім Лоран қатарының бір ғана коэффициентіне тең.

2. Контур интегралы ішкі шегерімдердің қосындысымен анықталады.

3. Нақты интеграл үшін полюстерді есептеумен бірге қосымша доғаның үлесін бағалау керек.