КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

6-дәріс

Тейлор қатары және жалғыздық теоремасы

Дәрістің мақсаты

Тейлор қатары голоморфты функцияны жергілікті түрде толық анықтайды.

Негізгі әдебиет. § 6, 35–38-беттер

Аналитикалық жіктеу

Голоморфты функция әр ішкі нүктенің маңайында жинақталатын дәрежелік қатармен беріледі.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Ядроның геометриялық қатары

Шеңбердің ішінде айнымалының ығысуы контур радиусынан кіші. Осы қатынас бойынша геометриялық қатар құрамыз.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

Қатарды интеграл астына өткізу

Ішкі тұйық дөңгелек үшін қатынас бірден кіші тұрақтымен шектеледі. Бірқалыпты жинақталу мүшелеп интегралдауға мүмкіндік береді.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta$$

Тейлор коэффициенттері

Жоғары туындылардың Коши формуласын қолдансақ, интеграл коэффициенттері туындылар арқылы жазылады.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Коэффициенттердің жалғыздығы

Дәрежелік қатарды ретімен туындылатып, центрге қоямыз. Әр қадамда тек тиісті мүше қалады.

$$f^{(n)}(a) = n!\,a_n$$

Коэффициент бағасы

Шекарадағы максимумнан әр коэффициентке шек аламыз. Ол жіктеу радиусының кемінде контур радиусындай екенін көрсетеді.

$$|a_n| \leq M_R R^{-n}$$

Бөлшек функцияның жіктелуі

Екінші нүктедегі ерекшелікке дейінгі арақашықтық радиусты береді. Геометриялық қатар арқылы коэффициенттер табылады.

$$\frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2$$

Центрді ауыстыру

Бөлімді центрге қатысты жазамыз. Жаңа ығысуға геометриялық қатар қолданамыз.

$$\frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n, \quad |z-1|<1$$

Нөлдің реті

Бірінші нөлден өзге коэффициенттің индексі нөлдің ретін анықтайды. Сол дәрежені жақша сыртына шығарамыз.

$$f(z)=(z-a)^m g(z),\quad g(a)=a_m\neq 0$$

Нөлдердің оқшаулығы

Үзіліссіздік бойынша қалған көбейткіш кіші дөңгелекте нөлден өзге. Демек функция осы дөңгелекте тек центрде нөлге айналады.

$$|g(z) - g(a)| < |g(a)|/2$$

Жалғыздық теоремасы

Байланысқан облыста екі голоморфты функция ішкі шектік нүктесі бар жиында тең болса, бүкіл облыста тең.

$$h = f - g$$

Жалғыздық теоремасының дәлелдеуі

Айырманың жинақталатын нөлдері оның шектік нүктеде бүкіл Тейлор қатары нөл екенін көрсетеді. Нөлге тең маңайы бар нүктелер жиыны ашық. Оның облыс ішіндегі кез келген шектік нүктесі де нөлдердің оқшаулығы бойынша осы жиында. Байланыстылықтан жиын бүкіл облысқа тең.

Нақты аралықтан жалғастыру

Нақты аралықта бірдей мән қабылдайтын екі голоморфты функция сол аралықты қамтитын ортақ байланысқан облыста тең.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Максимум модулі қағидасы

Ішкі максимумда кіші шеңбер үшін орта мән формуласының теңдік жағдайын қолданамыз. Функцияның барлық шекара мәні орталық мәнге тең болуы керек. Жалғыздық бойынша функция тұрақты.

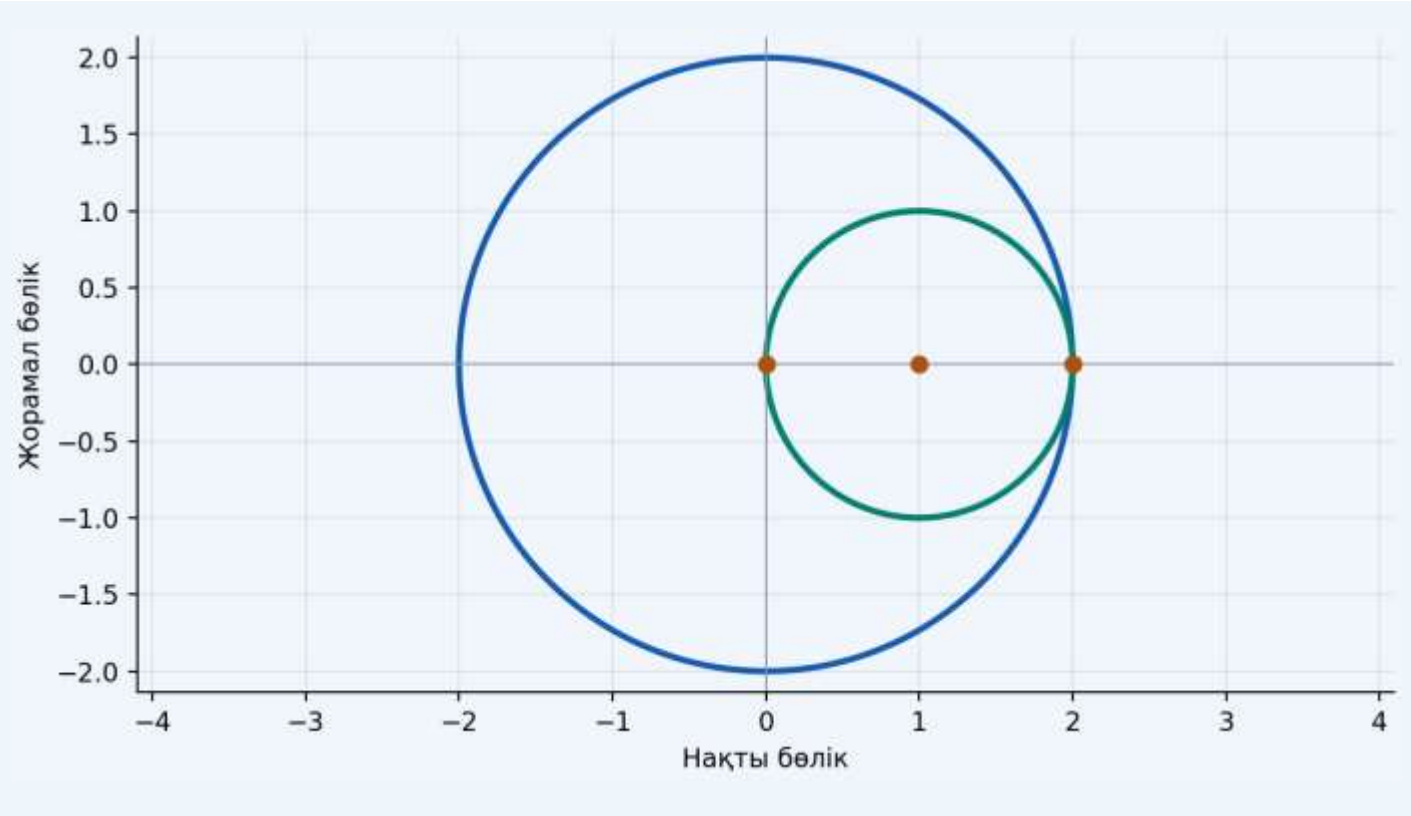
$$|f(a)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt \right| \leq |f(a)|$$

Нөлдің ретін есептеу

Синустың бірінші екі тақ мүшесін жазып, сызықтық мүшені қысқартамыз. Алғашқы қалған мүше үшінші дәрежелі.

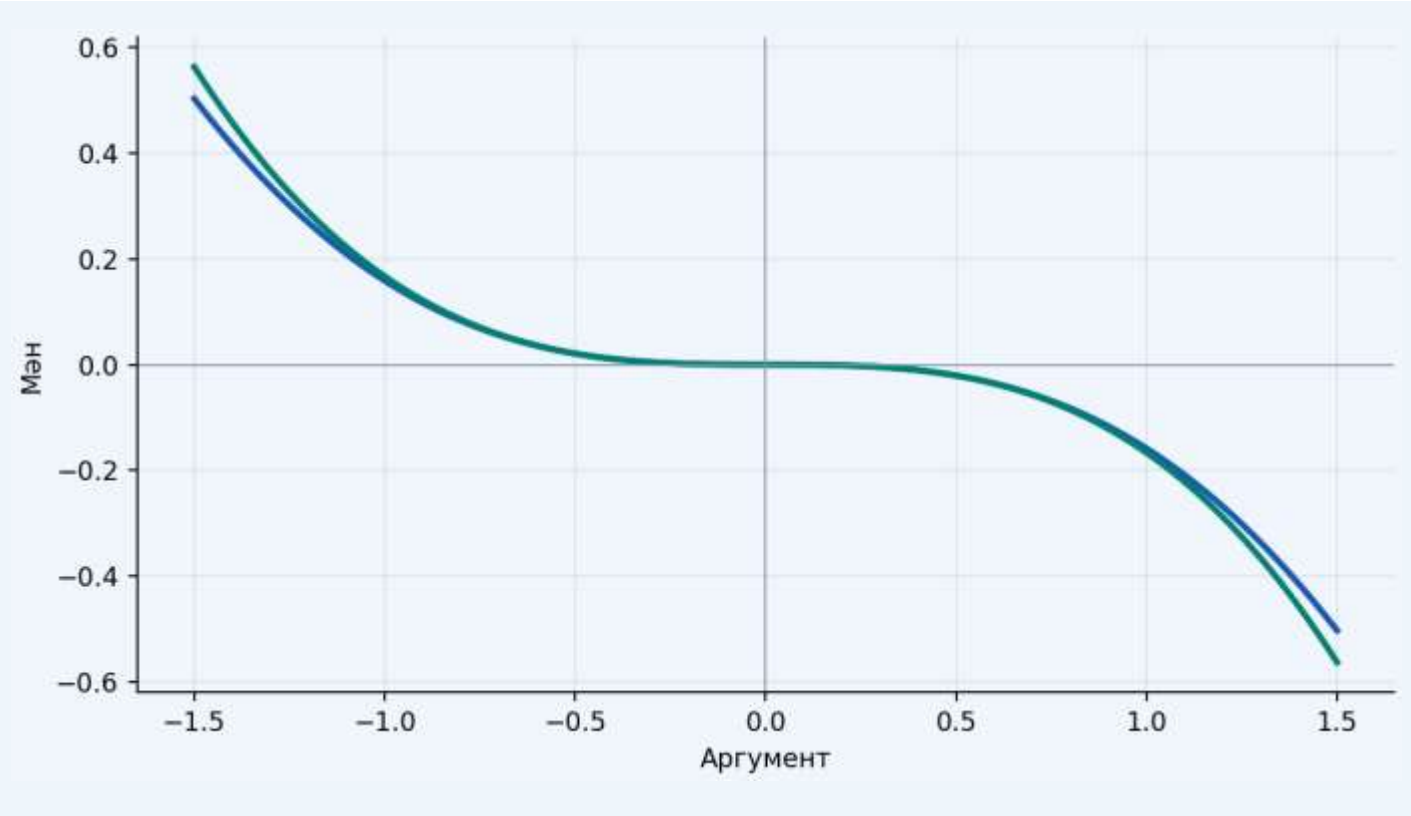
$$\sin z - z = -z^3/6 + O(z^5)$$

Тейлор дөңгелектері



1/(2−z) функциясы үшін 0 және 1 центрлерінен шекарадағы 2 нүктесіне дейінгі қашықтықтар әртүрлі.

Үшінші ретті нөл



Нақты осьтегі sin x−x қисығы нөл маңында $-x^3/6$ қисығымен салыстырылған.

Өздік тапсырма

1 e^z функциясын $z=1$ маңында жіктеңіз.

2 $(1-\cos z)^2$ функциясының нөлдегі ретін табыңыз.

3 Бүтін f функциясы $f(1/n)=0$ шартын орындаса, оның нөл екенін дәлелдеңіз.

Қорытынды

1. Тейлор қатары голоморфты функцияны жергілікті түрде толық анықтайды.

2. Бірінші нөлден өзге коэффициент нөлдің ретін береді.

3. Ішкі шектік нүктедегі мәндер теңдігі жалғыздық теоремасына әкеледі.