КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

1-дәріс

# Комплекс сандар және комплекс жазықтық

**Дәрістің мақсаты**

Комплекс санды алгебралық және полярлық түрде жазуға болады.

Негізгі әдебиет. § 1, 2–8-беттер

# Алгебралық жазылу

Комплекс сан нақты және жорамал бөліктерден тұрады. Екі санның теңдігі олардың екі бөлігінің де теңдігін білдіреді.

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

# Қосу және азайту

Біртекті бөліктерді жеке қосамыз. Жазықтықта қосу параллелограмм ережесіне бағынады.

$$(x+iy)+(u+iv)=(x+u)+i(y+v)$$

# Көбейту

Жақшаларды ашып, жорамал бірліктің квадратын алмастырамыз.

$$(x+iy)(u+iv)=(xu-yv)+i(xv+yu)$$

# Түйіндес сан

Жорамал бөліктің таңбасы өзгереді. Геометриялық тұрғыдан бұл нақты оське қатысты шағылдыру.

$$\bar{z} = x - iy, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2$$

# Бөлу формуласы және дәлелдеуі

Бөлімді нақты санға айналдыру үшін алым мен бөлімді бөлімнің түйіндесіне көбейтеміз. Нөлден өзге бөлім үшін квадраттар қосындысы оң.

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

# Модуль және қашықтық

Модуль координаталар басына дейінгі қашықтық. Екі нүктенің арақашықтығы олардың айырмасының модуліне тең.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad d(z, w) = |z - w|$$

# Үшбұрыш теңсіздігінің дәлелдеуі

Қосындының модулін квадраттаймыз. Нақты бөлік модульден аспайды. Екі жақтан оң квадрат түбір аламыз.

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$$

# Полярлық жазылу

Нөлден өзге санның аргументі толық айналымға еселі шамаға дейін анықталады.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r = |z| > 0$$

# Көбейтіндінің аргументі

Тригонометриялық қосу формулаларын қолдансақ, көбейтіндінің модулі модульдер көбейтіндісіне, аргументі бұрыштар қосындысына тең.

$$re^{i\alpha}se^{i\beta} = rse^{i(\alpha+\beta)}$$

# Муавр формуласының дәлелдеуі

Бірінші дәреже үшін теңдік тікелей орындалады. Әр келесі қадамда модульге тағы бір көбейткіш қосылып, аргументке тағы бір бұрыш қосылады.

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

# Түбірлер туралы тұжырым

Нөлден өзге санның оң бүтін дәрежелі түбірлері бір шеңберде бірдей бұрыштық аралықпен орналасады.

$$w_k = r^{1/n} e^{i(\theta + 2\pi k)/n}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

# Түбірлер формуласының дәлелдеуі

Теңдеудің модульдерін теңестіріп, түбірдің радиусын табамыз. Аргументтерді толық айналымға дейін теңестірсек, берілген бұрыштар шығады. Көрсетілген индекстер өзара бөлек шешім береді.

$$\rho^n = r, \quad n\phi = \theta + 2\pi k$$

# Бірліктің үшінші дәрежелі түбірлері

Бұрыштары нөл, 120 және 240 градус. Олар теңқабырғалы үшбұрыштың төбелерін береді.

$$1, \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

# Ашық дөңгелек пен сақина

Ашық дөңгелек бір шеңбердің ішін қамтиды. Сақина екі шеңбердің арасында жатады.

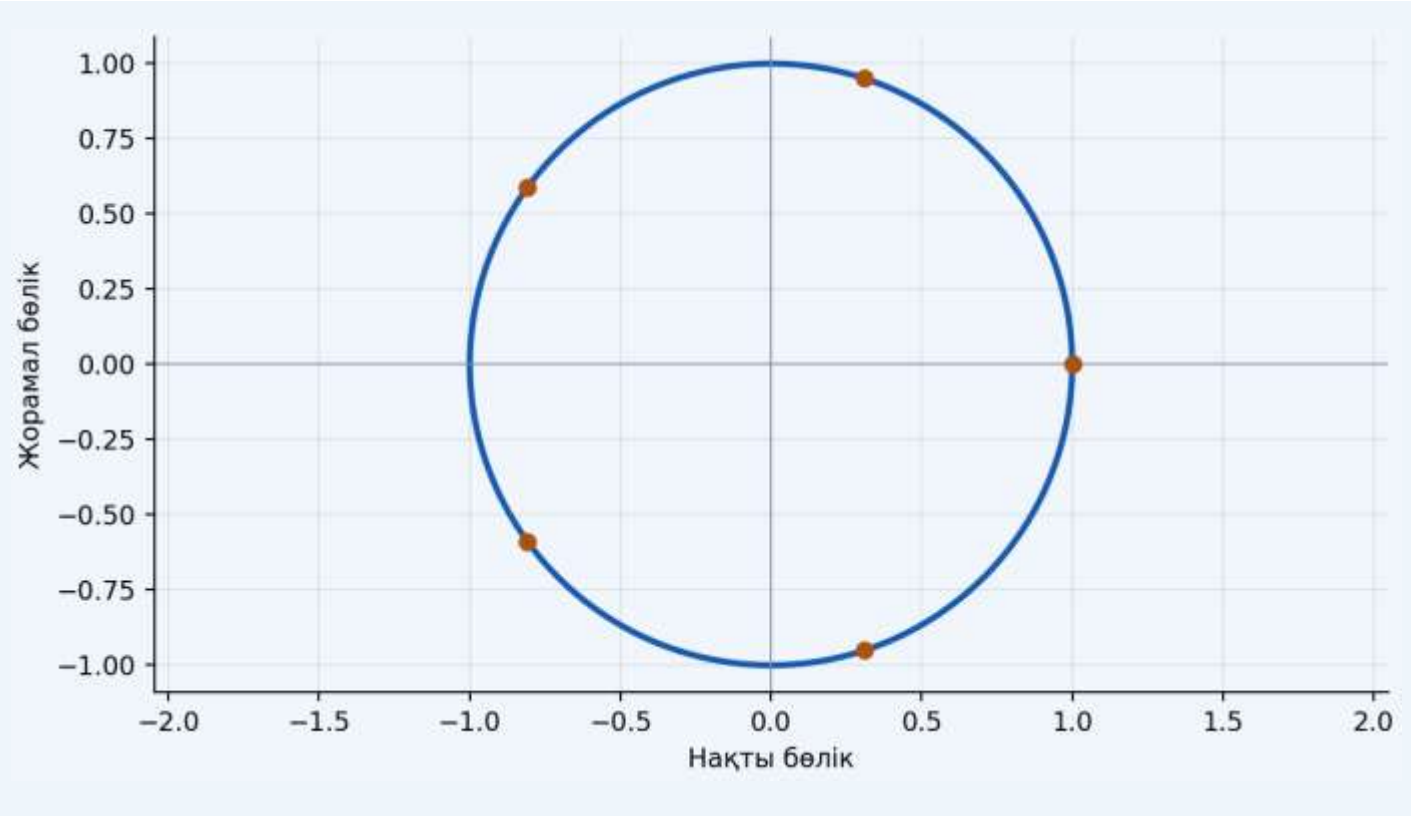
$$D(a,R)=\{z:|z-a|<R\},\quad r<|z-a|<R$$

# Шексіздік маңайы

Сфералық толықтыруда шексіздік бір нүкте ретінде қаралады. Кері шама нөлден өзге нүктелерде сыртқы облысты тесілген дөңгелекке бейнелейді.

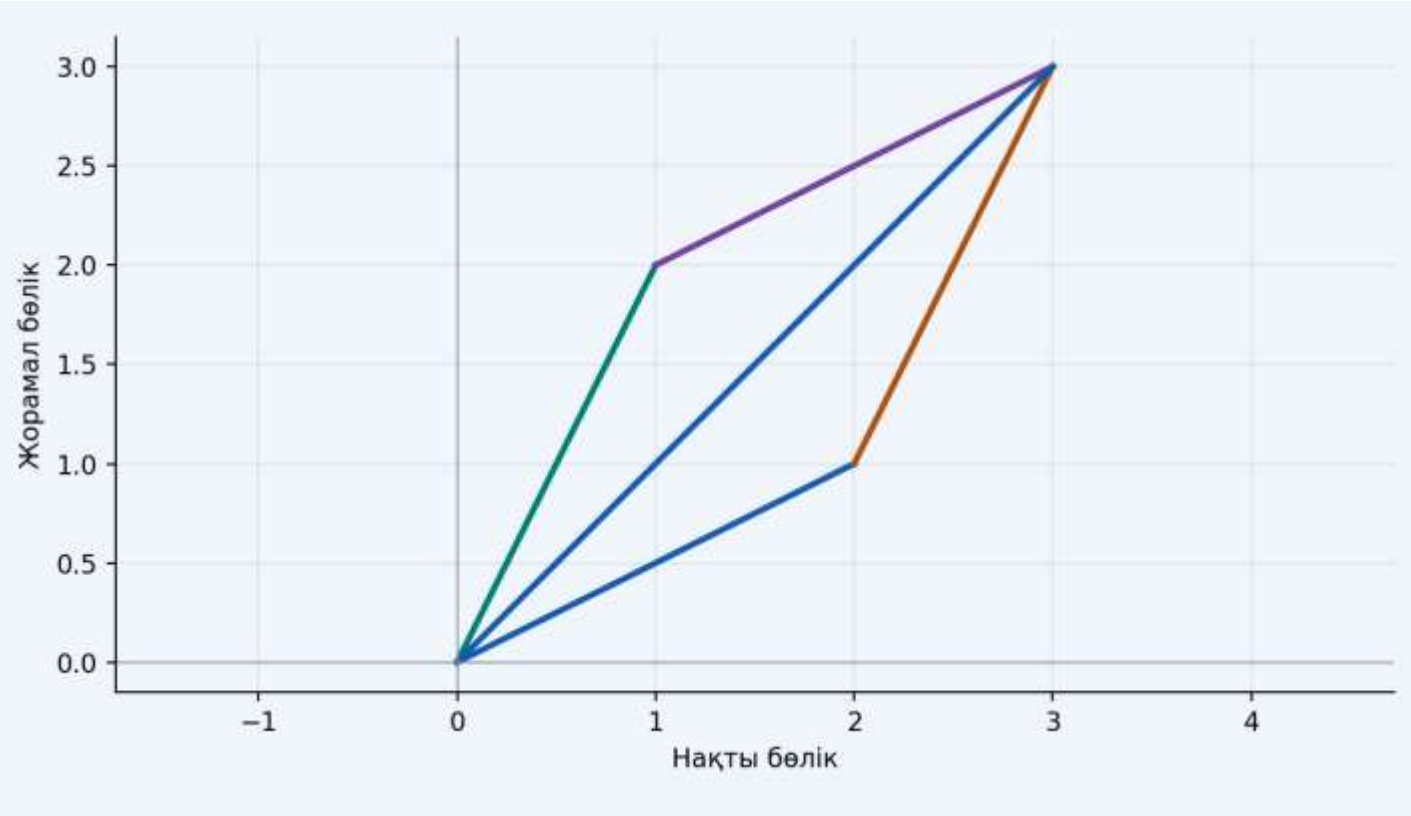
$$|z| > R \Leftrightarrow 0 < |1/z| < 1/R$$

# Бірліктің бесінші дәрежелі түбірлері




Әр көршілес түбір арасындағы бұрыш 72 градус.

# Қосу параллелограмы




Диагональ екі комплекс санның қосындысын береді.

# Өздік тапсырма

1. $z=1+2i$ және $w=4-2i$ нүктелерінің арақашықтығын есептеңіз.

2. $-8$ санының үшінші дәрежелі түбірлерін тауып, жазықтыққа белгілеңіз.

3. Модульдің кері үшбұрыш теңсіздігін дәлелдеңіз.

# Қорытынды

1. Комплекс санды алгебралық және полярлық түрде жазуға болады.

2. Көбейту модульдерді көбейтеді және аргументтерді қосады.

3. Түбірлер шеңбер бойымен бірдей бұрыштық аралықпен орналасады.