КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫ

14-дәріс

Мероморфты функциялар және Дирихле есебі

Дәрістің мақсаты

Мероморфты функцияның бас бөліктерін түзетілген қатармен құруға болады.

Негізгі әдебиет. §§ 15–16, 105–127-беттер

Мероморфты функция

Облыста голоморфты болатын, оқшау полюстерге рұқсат етілген функцияны мероморфты дейміз. Полюстегі бас бөлік Лоран қатарының теріс дәрежелерінен тұрады.

$$P_a(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

Миттаг–Леффлер теоремасы

Жазықтықта ішкі шектік нүктесі жоқ полюстер жиыны және әр полюсте бас бөлік берілсін. Осы бас бөліктері бар мероморфты функция құрылады.

Миттаг–Леффлер теоремасының дәлелдеуі

Полюстерді модулі өсу ретімен нөмірлейміз. Әр бас бөліктен радиусы полюс модулінің жартысына тең дөңгелектегі Тейлор көпмүшесін шегереміз. Қалдықты екілік геометриялық тізбекпен шектейміз.

$$\sup_{|z|\le |a_n|/2} |P_{a_n}(z) - Q_n(z)| \le 2^{-n}$$

Жинақталу және еркіндік

Кез келген ықшам жиын ақырында сол дөңгелектердің ішінде жатады. Сондықтан түзетілген қатардың құйрығы бірқалыпты жинақталады. Әр полюсте қалған мүшелер голоморфты. Екі шешімнің айырмасы бүтін.

Шексіз көбейтінді

Нөлден өзге көбейткіштер бірлікке жақындасын. Құйрықта бірлік маңындағы логарифмді таңдаймыз. Абсолют жинақталатын ауытқулар логарифмдер қатарының абсолют жинақталуын береді.

$$|\log(1+u)| \le 2|u|, \quad |u| \le 1/2$$

Вейерштрасс көбейткіштері

Экспоненталық түзету логарифмнің алғашқы дәрежелерін жояды. Қалған жоғары дәрежелер ықшам жиындағы жинақталуды қамтамасыз етеді.

$$E_p(w) = (1 - w)\exp\left(w + \frac{w^2}{2} + \cdots + \frac{w^p}{p}\right)$$

Гамма функциясы

Оң нақты бөлігі бар аргумент үшін интеграл абсолют жинақталады. Ықшам ішкі жиындарда туындыны интеграл астында алуға болады.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt$$

Гамма рекурсиясының дәлелдеуі

Бөліктеп интегралдаймыз. Нөлде оң нақты дәреже, шексіздікте экспоненталық кему шекара мүшесін жояды. Рекурсияны кері қолданып мероморфты жалғастырамыз.

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(n+1) = n!$$

Гармониялық функция

Екінші ретті туындылары үзіліссіз функция Лаплас теңдеуін орындаса, гармониялық. Коши–Риман шарттары голоморфты функцияның нақты және жорамал бөліктеріне осы теңдеуді береді.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Түйіндес функцияның бар болуы

Бірінші ретті дифференциалдық пішін тұйық, себебі Лаплас теңдеуі орындалады. Жай байланысқан облыста жол интегралы алғашқы функция береді. Ол Коши–Риман шарттарын орындайды.

$$dv = -u_y\,dx + u_x\,dy$$

Орта мән және максимум қағидасы

Кіші дөңгелекте гармониялық функцияны голоморфты функцияның нақты бөлігі ретінде жазып, Коши орта мән формуласын қолданамыз. Максимумға жеткен нүктенің айналасындағы әр кіші шеңберде барлық мән максимумға тең.

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+re^{it})\,dt$$

Дирихле есебі

Бірлік дөңгелектің ішінде гармониялық, тұйық дөңгелекте үзіліссіз және шеңберде берілген мәнді қабылдайтын функцияны іздейміз. Екі шешімнің айырмасына максимум және минимум қағидаларын қолдансақ, жалғыздық шығады.

$$\Delta u = 0, \quad u(e^{it}) = g(t)$$

Пуассон формуласы

Ядро голоморфты бөлшектің нақты бөлігі болғандықтан, интеграл іште гармониялық. Бірқалыпты ішкі бағалар туындыларды интеграл астына өткізуге мүмкіндік береді.

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\, g(t)\, dt$$

Шекаралық мәннің дәлелдеуі

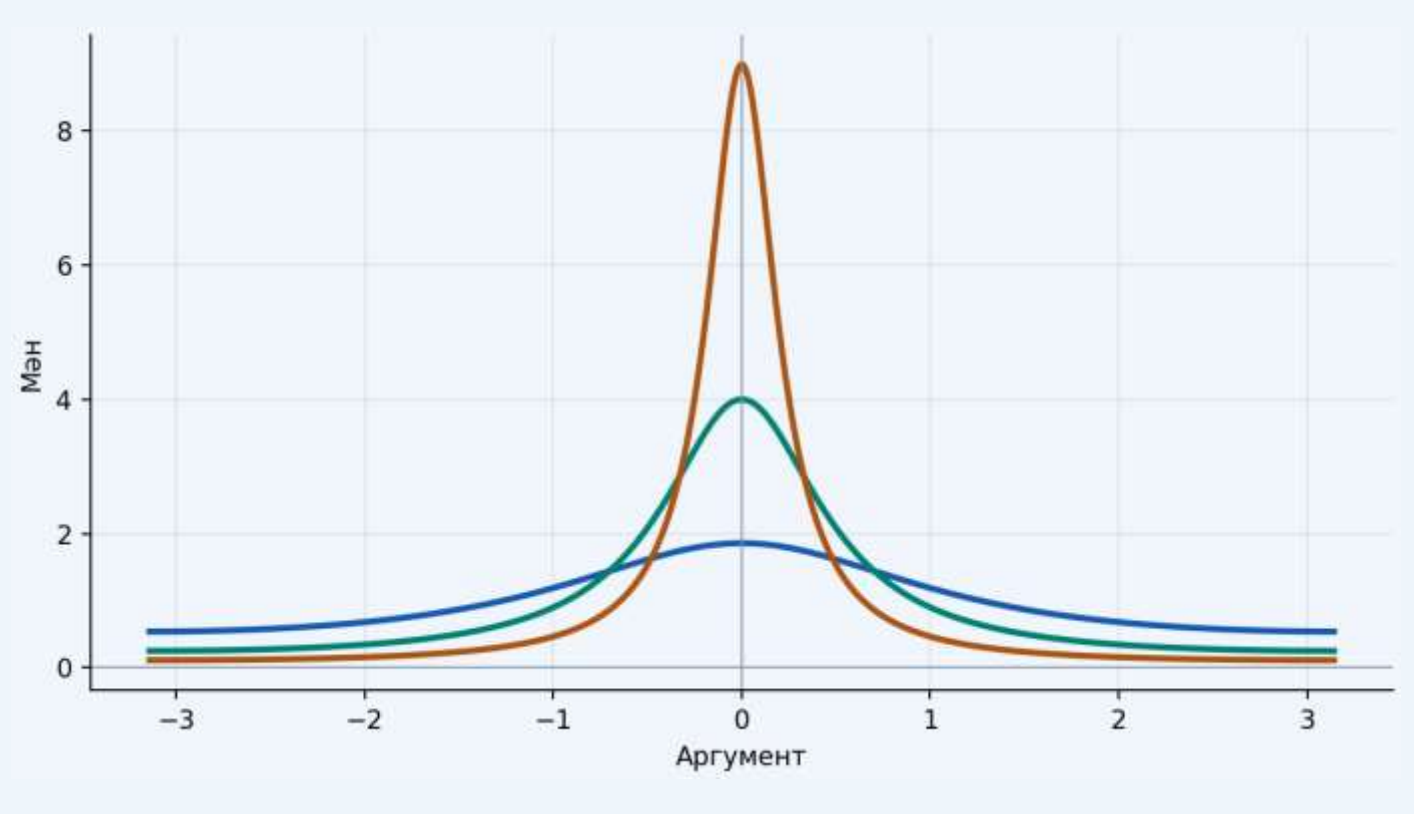
Ядро оң және нормаланған интегралы бірге тең. Бұрыш нөлден алыс болғанда ядро бірқалыпты нөлге кетеді. Интегралды жақын және алыс бөлікке бөліп, жақын бөлікте шекаралық деректің үзіліссіздігін қолданамыз.

Пуассон формуласының мысалы

Косинустың үшінші гармоникасы дөңгелекте үшінші дәрежелі голоморфты функцияның нақты бөлігіне жалғасады. Шекаралық мәнді тікелей тексереміз.

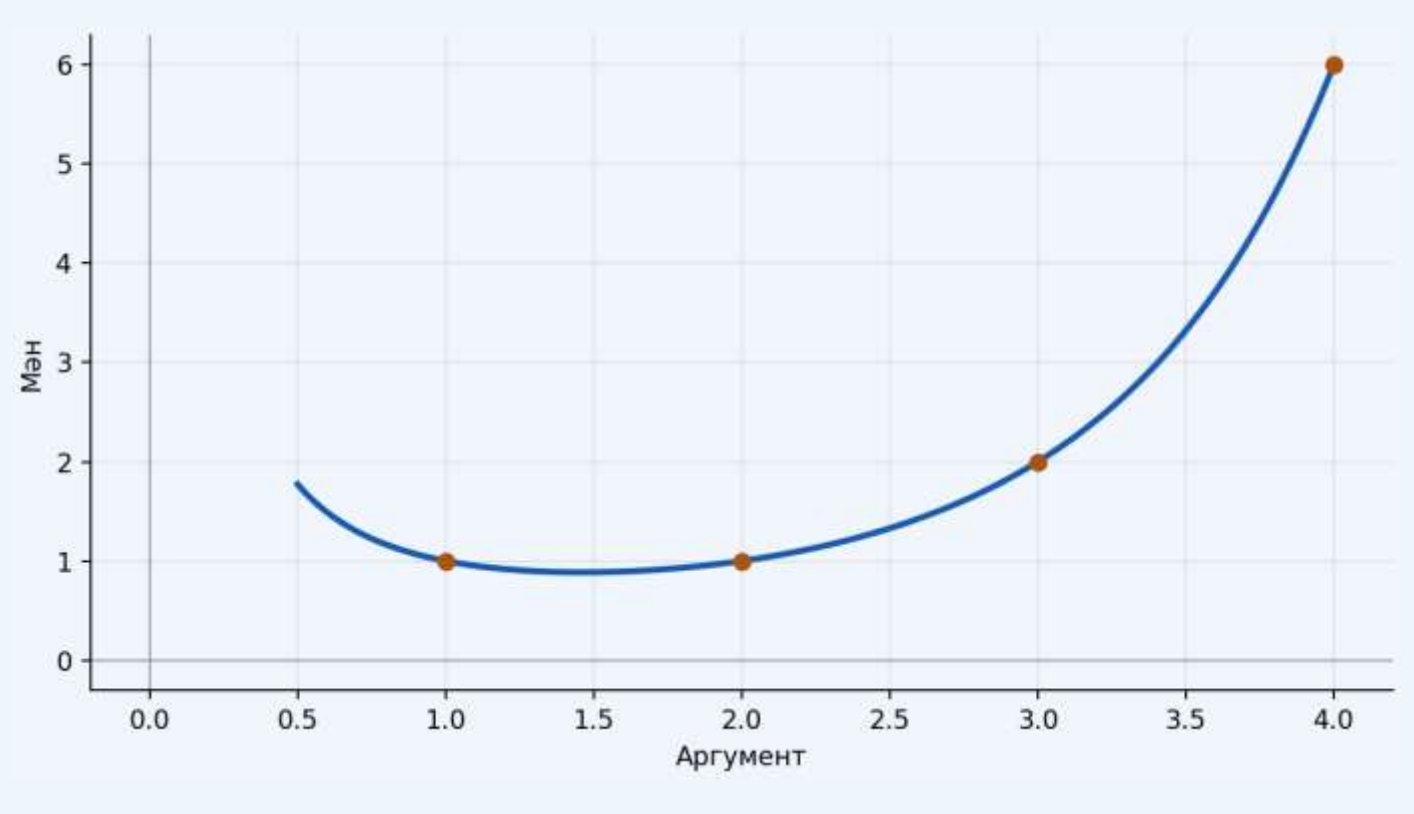
$$g(\theta)=\cos(3\theta), \qquad u(re^{i\theta})=r^3\cos(3\theta)$$

Пуассон ядросының шоғырлануы



Радиус 0,3-тен 0,8-ге дейін өскенде ядроның нөл маңындағы шыңы биіктейді.

Гамма функциясы және факториал



Оң нақты осьте Гамма функциясы 1, 2, 3, 4 нүктелерінде тиісінше 1, 1, 2, 6 мәнін қабылдайды.

Өздік тапсырма

1 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ мәнін Гаусс интегралымен шығарыңыз.

2 $u=x^2-y^2$ функциясының түйіндесін табыңыз.

3 $g(\theta)=2+\sin(2\theta)$ үшін дөңгелектегі Дирихле есебін шешіңіз.

Қорытынды

1. Мероморфты функцияның бас бөліктерін түзетілген қатармен құруға болады.

2. Гармониялық функция орта мән және максимум қасиеттерін орындайды.

3. Пуассон ядросы дөңгелектегі Дирихле есебінің жалғыз шешімін береді.