Топология пәніне кіріспе

- Топология — жиындардың үздіксіздікке қатысты қасиеттерін зерттейтін сала.
- Негізгі объект: (X, τ) топологиялық кеңістігі.
- Мақсат: ашық жиын, үздіксіз бейнелеу, ықшамдық және байланыстылықты түсіну.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: $\mathbb{R}$ түзуіндегі стандарт топологияны қарастырыңыз.

Топологиялық кеңістік аксиомалары

- $\tau \subseteq P(X)$ — ашық жиындар жүйесі.
- $\varnothing \in \tau$ және $X \in \tau$.
- Кез келген ашық жиындардың бірігуі ашық.
- Ашық жиындардың ақырлы қиылысуы ашық.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: дискретті топология $\tau = P(X)$.

Топологиялардың мысалдары

- Тривиалды топология: $\tau = \{\varnothing, X\}$.
- Дискретті топология: барлық ішкі жиындар ашық.
- Метрикалық топология: ашық шарлар арқылы анықталады.
- Ішкі кеңістік топологиясы: $\tau Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Тапсырма: екі нүктелі жиындағы барлық топологияларды сипаттаңыз.

Ашық және тұйық жиындар

- $F \subseteq X$ тұйық $\Leftrightarrow$ $X \setminus F$ ашық.
- Жиынның ішкі бөлігі $\mathrm{int}(A)$ — A-дағы ең үлкен ашық жиын.
- Тұйықталу $\mathrm{cl}(A)$ — A-ны қамтитын ең кіші тұйық жиын.
- Шекара: $\partial A = \mathrm{cl}(A) \setminus \mathrm{int}(A)$.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: $A = (0,1] \subseteq \mathbb{R}$ үшін $\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{cl}(A)$, ∂A табыңыз.

База және локалдық база

- $\mathcal{B} \subseteq \tau$ — база, егер әр ашық жиын база элементтерінің бірігуі болса.
- Әр $x \in U$ ашық жиыны үшін $x \in B \subseteq U$ болатын $B \in \mathcal{B}$ табылады.
- $\mathbb{R}$ кеңістігінде ашық интервалдар база құрайды.
- Екінші саналылық: саналатын база бар.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Тапсырма: рационал ұштары бар интервалдардың база екенін көрсетіңіз.

Үздіксіз бейнелеулер

- $f: X \to Y$ үздіксіз $\Leftrightarrow$ әр ашық $V \subseteq Y$ үшін $f^{-1}(V)$ ашық.
- Метрикалық кеңістікте бұл ε–δ анықтамасымен үйлеседі.
- Үздіксіз бейнелеулер композициясы үздіксіз.
- Гомеоморфизм — екі бағытта да үздіксіз биекция.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: $f(x)=x^3$ бейнелеуі $\mathbb{R}$-ден $\mathbb{R}$-ге гомеоморфизм.

Ықшамдық

- X ықшам ⇔ әр ашық жабыннан ақырлы ішкі жабын таңдауға болады.
- $\mathbb{R}^n$ кеңістігінде ықшамдық ⇔ тұйық әрі шектелген (Гейне–Борель).
- Ықшам кеңістіктің үздіксіз бейнесі ықшам.
- Ықшам жиындағы үздіксіз нақты функция максимум және минимум алады.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: [0,1] ықшам, ал (0,1) ықшам емес.

Байланыстылық және жолдық байланыстылық

- Байланысты кеңістікті өзара ажыратылған екі бос емес ашық жиынға бөлуге болмайды.
- Жолдық байланыстылық: кез келген x,y нүктелерін үздіксіз жол қосады.
- Жолдық байланысты кеңістік міндетті түрде байланысты.
- Үздіксіз бейне байланыстылықты сақтайды.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: $\mathbb{R}$ интервалдары байланысты; $[0,1] \cup [2,3]$ байланысты емес.

Хаусдорф кеңістігі және бөліну аксиомалары

- T_1: бір нүктеден тұратын жиындар тұйық.
- T_2 (Хаусдорф): екі әртүрлі нүктенің қиылыспайтын маңайлары бар.
- Кез келген метрикалық кеңістік — Хаусдорф.
- Хаусдорф кеңістігіндегі ықшам ішкі жиын тұйық.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Тапсырма: тривиалды топологиядағы T_2 қасиетін талдаңыз.

Топология бойынша қорытынды

- Ашық жиындар кеңістіктің құрылымын анықтайды.
- Үздіксіздік кері бейнелер арқылы тексеріледі.
- Ықшамдық шексіз жабыннан ақырлы таңдауға мүмкіндік береді.
- Байланыстылық және бөліну аксиомалары кеңістіктерді ажыратады.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Өзіндік жұмыс: топологиялық қасиеттердің сақталуын мысалдармен дәлелдеңіз.