Спектрлік теорияға кіріспе

- H — Гильберт кеңістігі, $A: D(A) \subseteq H \to H$ — сызықтық оператор.
- Спектр операторлың керілену қасиеттерін сипаттайды.
- Меншікті мәндер, резольвента және спектрлік жіктелу зерттеледі.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: ақырлы өлшемде A матрицасының спектрі оның меншікті мәндерінен тұрады.

Сызықтық және шенелген операторлар

- $A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$ — сызықтылық шарты.
- A шенелген $\Leftrightarrow \|Ax\| \le M\|x\|$ (барлық x үшін).
- Оператор нормасы: $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.
- Банах кеңістіктерінде шенелген сызықтық оператор үздіксіз.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: ℓ^2 кеңістігінде $Ax=(2x_1,2x_2,\dots) \Rightarrow \|A\|=2$.

Меншікті мән және меншікті вектор

- $Ax=\lambda x$, $x \neq 0$ болса, λ — меншікті мән.
- $\ker(A-\lambda I)$ — λ мәніне сәйкес меншікті ішкі кеңістік.
- Ақырлы өлшемде $\det(A-\lambda I)=0$ сипаттамалық теңдеуін шешеміз.
- Меншікті векторлар оператордың әрекетін жеңілдетеді.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: diag(2,3) матрицасының меншікті мәндері 2 және 3.

Резольвента және спектр

- $\rho(A)$ — $(A-\lambda I)^{-1}$ бар және шенелген болатын λ мәндері.
- $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ — оператор спектрі.
- $R(\lambda,A) = (A-\lambda I)^{-1}$ — резольвента.
- Резольвента жиыны ашық; резольвента аналитикалық.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Тапсырма: $A=\mathrm{diag}(1,4)$ үшін $R(\lambda,A)$ жазыңыз.

Спектрдің негізгі түрлері

- Нүктелік спектр: $A-\lambda I$ инъективті емес.
- Үздіксіз спектр: кері оператор тығыз облыста анықталған, бірақ шенелмеген.
- Қалдық спектр: $A-\lambda I$ бейнесі кеңістікте тығыз емес.
- Спектрлік түрлердің сипаты операторлардың облысына тәуелді.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: көбейту операторларының спектрін талқылаңыз.

Өзіне-өзі түйіндес операторлар

- $A^*=A$ болса, A — өзіне-өзі түйіндес оператор.
- Өзіне-өзі түйіндес операторлардың спектрі нақты сандар жиынында жатады.
- Әртүрлі меншікті мәндердің меншікті векторлары ортогонал.
- Шектелмеген операторда $D(A)=D(A^*)$ шарты маңызды.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: нақты симметриялы матрица өзіне-өзі түйіндес.

Компакт операторлар

- Компакт оператор шенелген жиынды салыстырмалы ықшам жиынға бейнелейді.
- Шексіз өлшемді кеңістікте нөлден өзге спектрлік нүктелер — меншікті мәндер.
- Нөлден өзге меншікті мәндердің жинақталуы тек нөлде болуы мүмкін.
- Компакт өзіне-өзі түйіндес оператор үшін ортонормаланған меншікті векторлар жүйесі бар.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: интегралдық операторлардың компактылығын зерттеңіз.

Спектрлік теорема

- Өзіне-өзі түйіндес матрица ортогоналды диагоналданады.
- $A = Q\Lambda Q^*$ — ақырлы өлшемдегі спектрлік жіктелу.
- Жалпы жағдайда $A = \int \lambda \, dE(\lambda)$ спектрлік өлшемі арқылы өрнектеледі.
- Функционалдық есептеу $f(A)$ операторын анықтауға мүмкіндік береді.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Тапсырма: 2×2 симметриялы матрицаны диагоналдаңыз.

Штурм–Лиувилль есебі

- $-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda w(x)y$ — спектрлік теңдеу.
- Шекаралық шарттар операторның анықталу облысын бекітеді.
- Тиісті шарттарда меншікті мәндер нақты және дискретті.
- Меншікті функциялар ортогоналдық жүйе құрады.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Мысал: $-y''=\lambda y$, $y(0)=y(\pi)=0 \Rightarrow \lambda_n=n^2$.

Спектрлік теорияның қолданылуы

- Дифференциалдық теңдеулерді айнымалыларға жіктеп шешу.
- Тербеліс, жылу және толқын процестерін модельдеу.
- Операторлың орнықтылығын және эволюциясын зерттеу.
- Кері спектрлік есептерде параметрлерді спектр бойынша қалпына келтіру.

МЫСАЛ / ТАПСЫРМА

Өзіндік жұмыс: бір шекаралық есептің алғашқы үш меншікті мәнін табыңыз.