Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «7M05405 – Механика и энергетика» · магистратура

Дисциплина: Методы подобия и размерности в механике

Лекция № 4

Теория подобия механических систем. Геометрическое, кинематическое и динамическое подобия

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

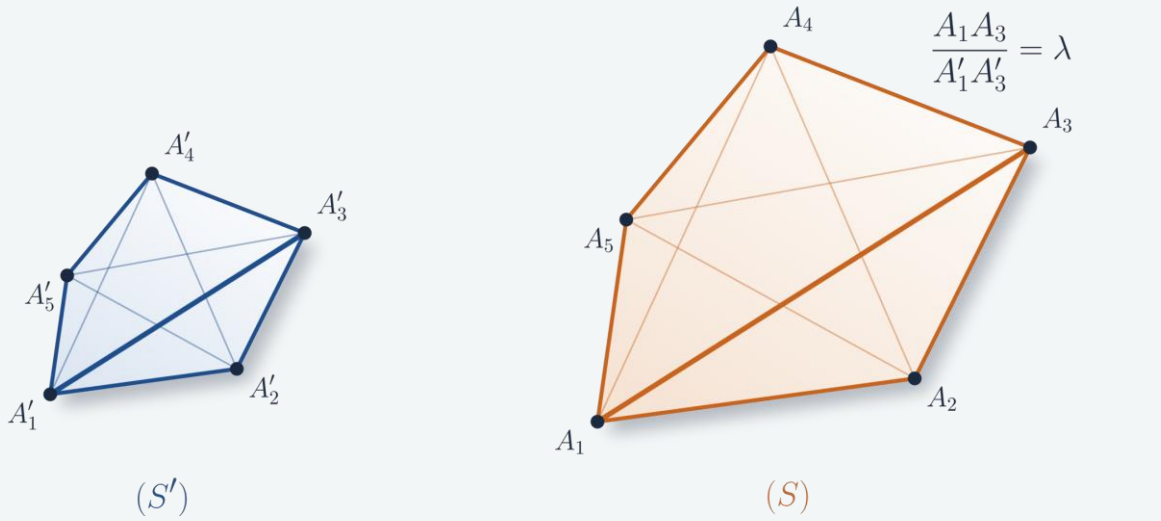
Алматы, 2026 год

Геометрическое подобие

Две системы точек $A_1, \ldots, A_n$ и $A'_1, \ldots, A'_n$ называются **геометрически подобными**, если между точками можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы соответственные отрезки находились в постоянном отношении:

$$\frac{A_iA_j}{A'_iA'_j} = \lambda, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

λ — **масштаб (коэффициент) подобия** длин. Площади относятся как λ^2, объёмы — как λ^3.



Геометрически подобные системы: все соответственные отрезки — в отношении λ

Материальное подобие

Если точки двух геометрически подобных систем снабжены массами и массы соответственных точек находятся в постоянном отношении

$$\frac{m_i}{m_i'} = \mu, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

то системы называются **материально подобными**; μ — масштаб масс.

Для однородных тел из одного материала $\mu = \lambda^3$; для разных материалов $\mu = \lambda^3\, \rho/\rho'$.

Соответственные моменты

Подобие систем (S) и (S′) устанавливается сравнением конфигураций в моменты t и t′ — соответственные моменты.

Неизменяемые системы

Для абсолютно твёрдых тел геометрическое подобие, установленное в один момент, сохраняется всё время.

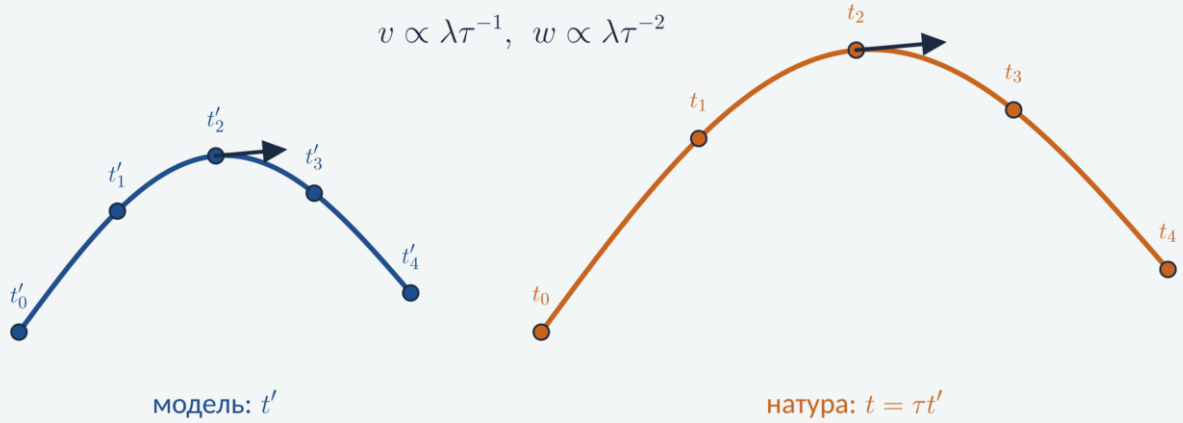
Кинематическое подобие

Если существует непрерывная последовательность соответственных моментов t и t′, для которых системы геометрически подобны с **постоянным** λ, причём

$$t = \tau\, t' \tag{1}$$

где τ = const — **масштаб времени**, то движущиеся системы называются **кинематически подобными**.

Траектории подобны, а соответственные точки проходят их за пропорциональные промежутки времени.



Кинематически подобные движения: соответственные положения в соответственные моменты

Масштабы кинематических величин

При кинематическом подобии для соответственных точек и моментов:

Длина	Время	Скорость	Ускорение
λ	τ	$\lambda\tau^{-1}$	$\lambda\tau^{-2}$

$$w_i = \lambda\tau^{-2} w_i', \qquad m_i = \mu\, m_i' \tag{2, 3}$$

Угловые скорости относятся как τ^{-1}, угловые ускорения — как τ^{-2}; углы при подобии сохраняются.

Механическое (динамическое) подобие

Системы, подобные **кинематически и материально**, называются **механически подобными**. Перемножая (2) и (3):

$$m_i w_i = \lambda \tau^{-2} \mu \, m_i' w_i' \qquad (4)$$

Так как $m_i w_i = F_i$ — модули сил на соответственные частицы:

$$F_i = \varphi \, F_i', \qquad \varphi = \lambda \tau^{-2} \mu \qquad (6, 7)$$

ф = λτ⁻²μ — масштаб сил. Векторы сил, как и ускорений, одинаково ориентированы.

Итог

Соответственные длины, скорости, ускорения и силы находятся в постоянных отношениях λ, λτ⁻¹, λτ⁻², λτ⁻²μ.

Свобода выбора

Три масштаба λ, τ, μ — независимы; все остальные выражаются через них.

Критерий подобия Ньютона

Масштабы λ, τ, μ, ϕ не независимы: ϕ = λτ⁻²μ. Это условие можно записать как равенство безразмерного комплекса в натуре и модели:

$$\frac{F\,t^2}{m\,l} = \frac{F'\,t'^2}{m'\,l'} = \mathrm{Ne} \qquad (\text{критерий Ньютона})$$

Смысл

отношение действующей силы к силе инерции ml/t²

Общий закон

любые механически подобные системы имеют одинаковое число Ньютона

Частные критерии

конкретизируя природу сил (тяжесть, вязкость, упругость), получаем Fr, Re, Ca и др.

Критерии подобия — это П-параметры (лекция 3), равенство которых обеспечивает подобие.

Подобие при действии силы тяжести: число Фруда

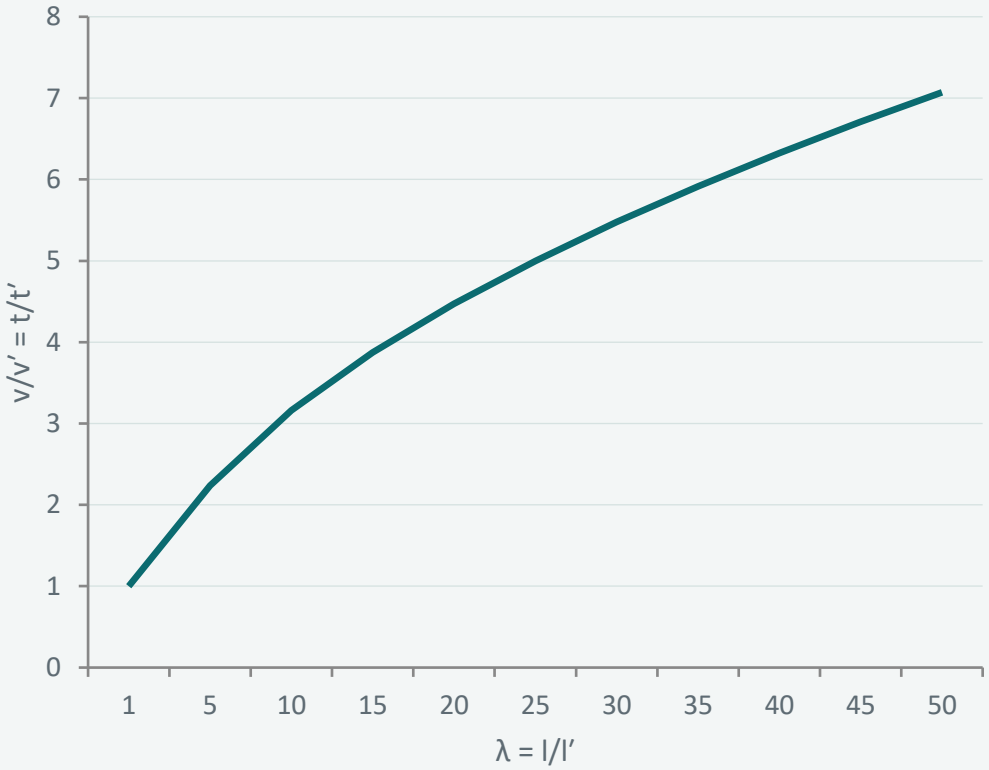
Если движение определяется силами тяжести, масштаб сил равен масштабу весов: ϕ = μ (g одинаково). Тогда из ϕ = λτ⁻²μ:

$$\frac{F}{F'} = \frac{mg}{m'g} \Rightarrow \tau = \sqrt{\lambda} \Rightarrow \mathrm{Fr} = \frac{v^2}{gl} = \mathrm{idem}$$

Пример: модель судна 1 : 25. Натура плывёт со скоростью 10 м/с — модель должна двигаться со скоростью 2 м/с. Для силы волнового сопротивления (тот же материал, μ = λ³):

$$\lambda = 25: \qquad \frac{v}{v'} = \sqrt{\lambda} = 5, \qquad \frac{F}{F'} = \lambda^3 = 15\,625$$

Масштабы скорости и времени по Фруду: √λ



Подобие при действии вязкости: число Рейнольдса

Если существенны силы вязкого трения $F \sim \mu_в v l$, то из $\phi = \lambda\tau^{-2}\mu$ следует постоянство числа Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{vl}{\nu} = \mathrm{idem} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{v'} = \frac{1}{\lambda} \quad (\nu = \nu')$$

При $\lambda = 25$ и той же жидкости модель должна двигаться в 25 раз **быстрее** натуры, а по Фруду — в 5 раз **медленнее**.

Одновременно удовлетворить Fr = idem и Re = idem в одной жидкости невозможно — моделирование частичное.

Практика судостроения

Модель испытывают по Фруду; вязкое сопротивление пересчитывают по эмпирическим формулам (метод Фруда).

Аэродинамика

Для достижения Re = idem используют сжатый или охлаждённый газ (трубы переменной плотности).

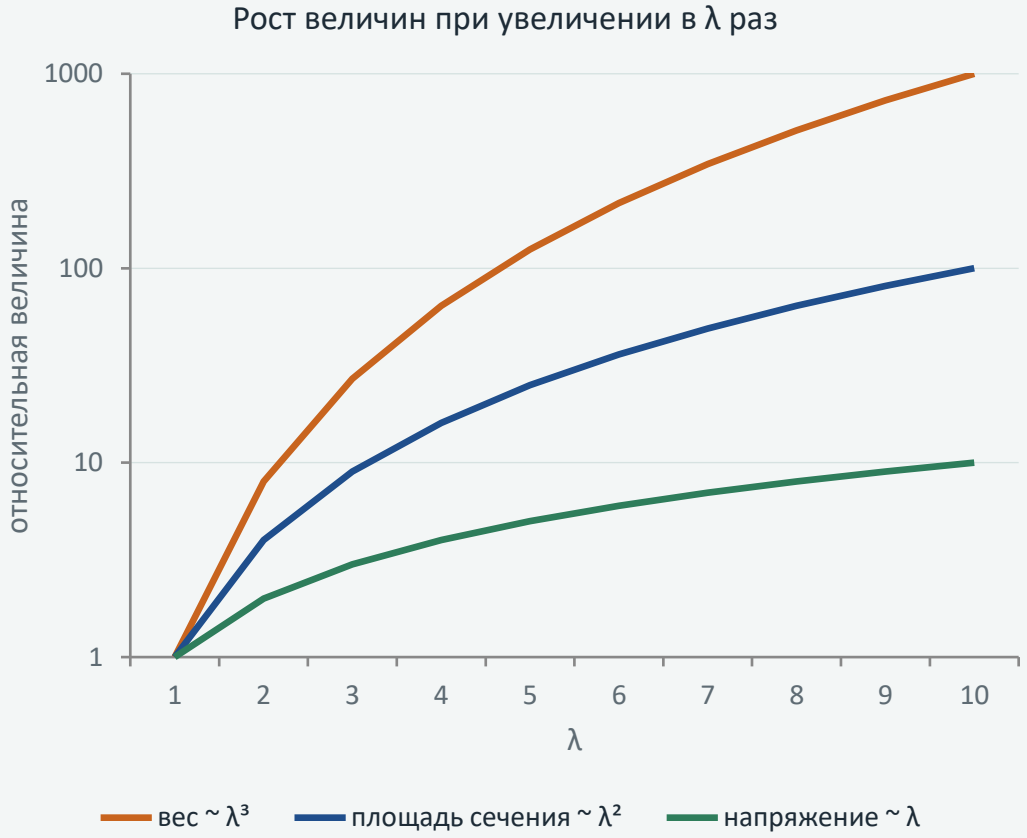
Пример: закон «квадрата — куба» Галилея

Увеличим конструкцию в λ раз, сохранив материал ($\mu = \lambda^3$):

- собственный вес растёт как $\boldsymbol{\lambda^3}$;
- площадь сечений — как $\boldsymbol{\lambda^2}$;
- напряжения от собственного веса $\sigma \sim mg/S$ — как $\boldsymbol{\lambda}$.

Геометрическое подобие не гарантирует механического: при большом λ конструкция разрушается под собственным весом.

Поэтому кости крупных животных относительно толще, а модели мостов испытывают в центрифугах (увеличивая g в λ раз).



Сводка масштабов подобия

Величина	Общий случай	Подобие по Фруду ($\mu = \lambda^3$)	Подобие по Рейнольдсу ($\nu = \nu'$)
Длина	λ	λ	λ
Время	τ	$\sqrt{\lambda}$	λ^2
Скорость	$\lambda\tau^{-1}$	$\sqrt{\lambda}$	λ^{-1}
Ускорение	$\lambda\tau^{-2}$	1	λ^{-3}
Масса	μ	λ^3	λ^3
Сила	$\lambda\tau^{-2}\mu$	λ^3	1

Для модели в 25 раз меньше натуры по Фруду время течёт в 5 раз быстрее, а силы в 15 625 раз меньше.

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Геометрическое подобие: соответственные отрезки в отношении λ; материальное — массы в отношении μ.
2. Кинематическое подобие: геометрическое подобие в соответственные моменты $t = \tau t'$.
3. Механическое подобие = кинематическое + материальное; масштаб сил $\phi = \lambda\tau^{-2}\mu$.
4. Инвариант механического подобия — число Ньютона $Ft^2/(ml)$.
5. Частные критерии: $Fr = v^2/(gl)$ для сил тяжести, $Re = vl/\nu$ для вязких сил; одновременно их выполнить в одной жидкости нельзя.

Контрольные вопросы

1. Какие системы называются геометрически и материально подобными?
2. Дайте определение кинематического подобия. Что такое соответственные моменты?
3. Как связаны масштабы длин, времени, скоростей и ускорений?
4. Выведите масштаб сил для механически подобных систем.
5. Что выражает критерий подобия Ньютона?
6. Получите условие подобия по Фруду. Рассчитайте скорость модели судна 1:25.
7. Почему нельзя одновременно обеспечить $Fr = idem$ и $Re = idem$?