Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «7M05405 – Механика и энергетика» · магистратура

Дисциплина: Методы подобия и размерности в механике

Лекция № 5

Модель вязкой несжимаемой жидкости (система уравнений гидродинамики и теплообмена)

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

Алматы, 2026 год

Вязкая несжимаемая жидкость

Рассмотрим изотермическое движение однородной вязкой несжимаемой жидкости. Следствие несжимаемости и однородности:

$$\rho = \text{const}, \qquad J_1 = \nabla_i v^i = 0$$

Жидкость **вязкая**, если тензор напряжений связан с тензором скоростей деформаций законом **Навье — Стокса**:

$$P^{ij} = -p\, g^{ij} + 2\mu\, g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}, \qquad e_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right)$$

Поверхностная сила, кроме нормальной, имеет и **касательную** составляющую. Для изотермических процессов коэффициент вязкости μ постоянен.

Вода, 20 °C

μ ≈ 1,0·10⁻³ Па·с
ν ≈ 1,0·10⁻⁶ м²/с

Воздух, 20 °C

μ ≈ 1,8·10⁻⁵ Па·с
ν ≈ 1,5·10⁻⁵ м²/с

Глицерин, 20 °C

μ ≈ 1,4 Па·с
ν ≈ 1,1·10⁻³ м²/с

Уравнения Навье — Стокса

Дивергенция тензора напряжений при $\nabla_i v^i = 0$:

$$\nabla_j P^{ij} = -\nabla^i p + \mu\,\Delta v^i$$

Уравнение движения — **уравнение Навье — Стокса**:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\,\Delta\vec{v}, \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{1}$$

Конвекция

$(v\cdot\nabla)v$ — нелинейный инерционный член

Давление

$-(1/\rho)\nabla p$

Вязкость

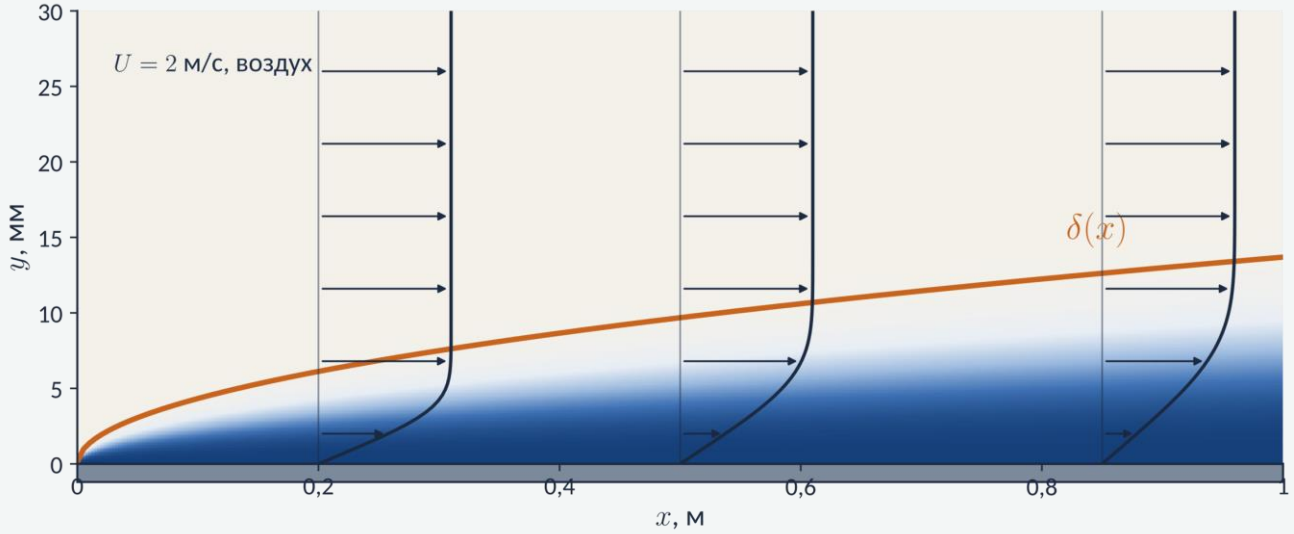
$\nu\Delta v$ — диффузия импульса; $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость

Замкнутая система уравнений гидродинамики

Присоединяя уравнение неразрывности, получаем замкнутую систему для трёх компонент скорости и давления:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i = F^i - \dfrac{1}{\rho}\nabla^i p + \nu\,\Delta v^i \\ \nabla_i v^i = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Граничные условия: **прилипание** на твёрдой стенке v = v_w; заданная скорость или давление на входе и выходе; начальные условия для нестационарного течения.



Пограничный слой на пластине: численное решение Блазиуса для системы (2)

Уравнение теплообмена

Для задач теплообмена систему (2) дополняют **уравнением энергии** (притока тепла) для несжимаемой жидкости с постоянными свойствами:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = \varkappa \, \Delta T + 2\mu \, e_{ij} e^{ij}$$

$\varkappa$ — теплопроводность, c_p — теплоёмкость. Последний член — **вязкая диссипация** (лекция 12 курса МСС).

Если свойства не зависят от температуры, задачи гидродинамики и теплообмена разделяются: сначала находят v, p, затем T.

Конвекция тепла

$\rho c_p \, v \cdot \nabla T$ — перенос тепла движущейся жидкостью

Теплопроводность

$\varkappa \Delta T$ — молекулярный перенос по закону Фурье

Диссипация

$2\mu e_{ij} e^{ij} \geq 0$ — переход работы сил трения в тепло

Приведение уравнений к безразмерному виду

Введём характерные масштабы: длину L, скорость U, время t_0, перепад температур ΔT:

$$\vec{x} = L\,\vec{x}^{*}, \quad \vec{v} = U\,\vec{v}^{*}, \quad t = t_0\,t^{*}, \quad p - p_0 = \rho U^2 p^{*}, \quad T - T_w = \Delta T\,\theta$$

Уравнение Навье — Стокса в безразмерных переменных:

$$\mathrm{Sh}\,\frac{\partial \vec{v}^{*}}{\partial t^{*}} + (\vec{v}^{*}\cdot\nabla^{*})\vec{v}^{*} = \frac{1}{\mathrm{Fr}}\,\vec{e}_g - \nabla^{*}p^{*} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta^{*}\vec{v}^{*}$$

Уравнение энергии:

$$\mathrm{Sh}\,\frac{\partial \theta}{\partial t^{*}} + \vec{v}^{*}\cdot\nabla^{*}\theta = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\,\Delta^{*}\theta + \frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\,\Phi^{*}$$

Решение зависит только от безразмерных комплексов — критериев подобия.

Критерии гидродинамического подобия

Критерий	Определение	Физический смысл
Рейнольдса Re	UL/ν	отношение сил инерции к силам вязкости
Фруда Fr	$U^2/(gL)$	отношение сил инерции к силе тяжести
Струхаля Sh	$L/(Ut_0)$	мера нестационарности процесса
Эйлера Eu	$\Delta p/(\rho U^2)$	отношение сил давления к силам инерции

Для геометрически подобных течений с одинаковыми граничными условиями равенство Re, Fr, Sh обеспечивает подобие; Eu при этом — определяемый критерий: $Eu = \Phi(Re, Fr, Sh)$.

Критерии теплового подобия

Критерий	Определение	Физический смысл
Прандтля Pr	$\nu/a = \mu c_p/\varkappa$	отношение диффузии импульса к диффузии тепла
Пекле Pe	$UL/a = Re \cdot Pr$	отношение конвективного переноса тепла к теплопроводности
Эккерта Ec	$U^2/(c_p \Delta T)$	роль вязкой диссипации в балансе энергии
Нуссельта Nu	$\alpha L/\varkappa$	безразмерный коэффициент теплоотдачи (определяемый)

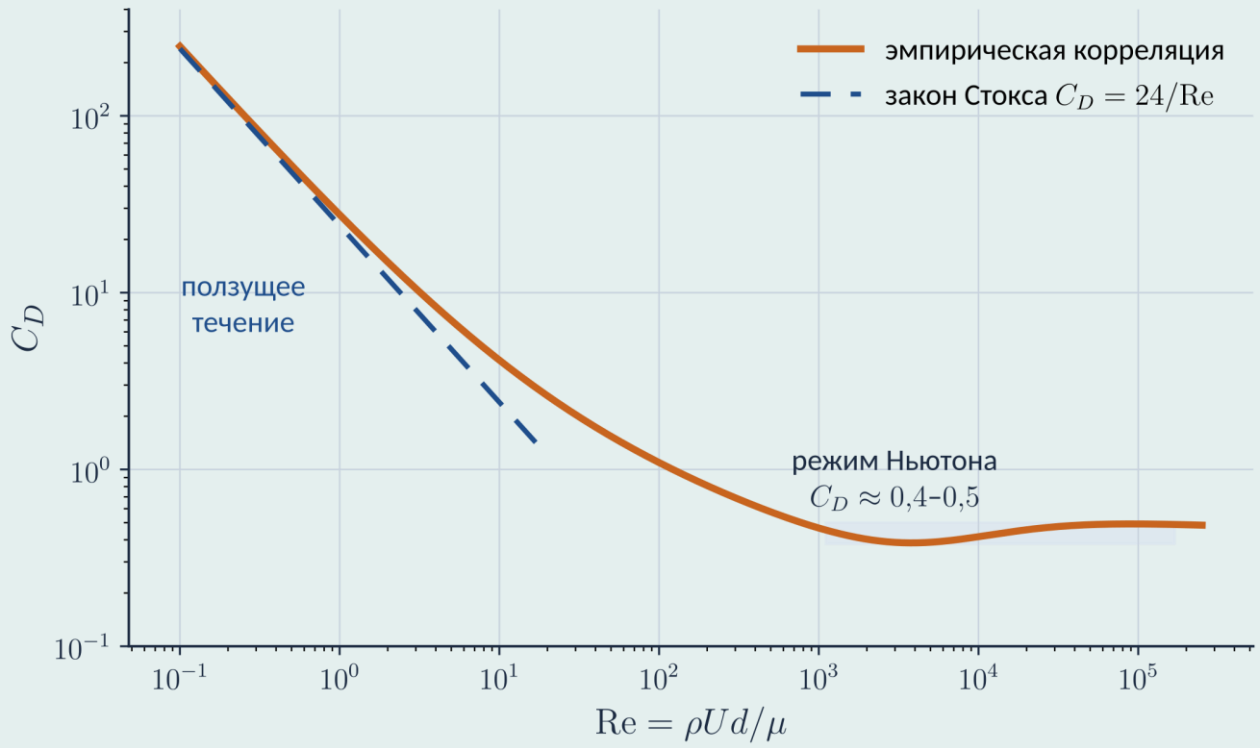
$a = \varkappa/(\rho c_p)$ — температуропроводность, α — коэффициент теплоотдачи. Типичные значения Pr: воздух ≈ 0,7; вода ≈ 7; масла — 10^2–10^3.

Число Рейнольдса и режимы течения

Число Рейнольдса определяет **режим течения**:

- **Re ≪ 1** — ползущее течение, инерция пренебрежимо мала (закон Стокса);
- **Re ~ 10–10³** — ламинарное течение с отрывом и вихрями;
- **Re ≳ 10⁵** — развитая турбулентность, тонкий пограничный слой.

Течение в круглой трубе: ламинарное при Re = Ud/ν < 2300.



Сопротивление шара в разных режимах: $C_D = Φ(Re)$

Пример: толщина пограничного слоя

Вблизи стенки силы вязкости сравнимы с силами инерции: $U^2/x \sim \nu U/\delta^2$. Отсюда

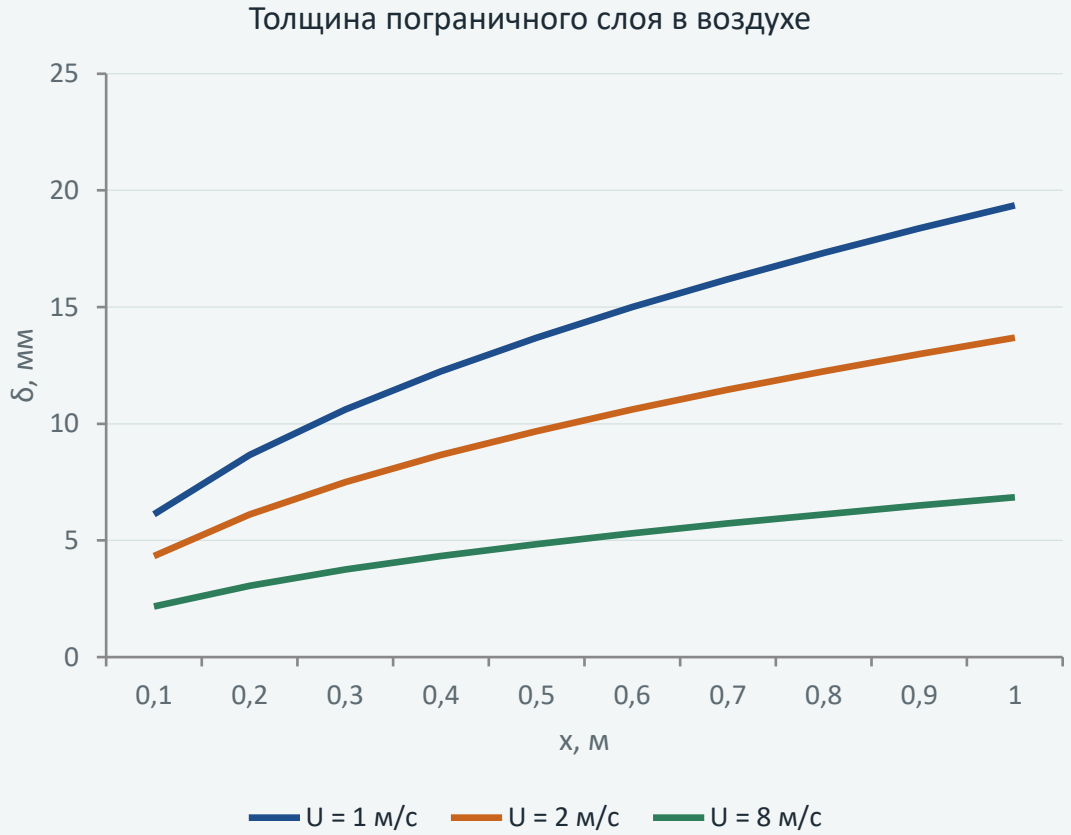
$$\delta(x) \approx \frac{5\,x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}, \qquad \mathrm{Re}_x = \frac{U x}{\nu}$$

Коэффициент 5 даёт численное решение Блазиуса (по уровню 0,99U).

Воздух, U = 2 м/с, x = 1 м: $\mathrm{Re}_x \approx 1{,}3\cdot 10^5$, $\delta \approx 14$ мм.

Теплоотдача ламинарной пластины:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}332\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad (\text{ламинарный слой, } \mathrm{Pr} \gtrsim 0{,}6)$$



Моделирование: критериальные уравнения

По П-теореме результаты опытов по теплообмену обрабатывают в виде **критериального уравнения**:

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha L}{\varkappa} = \Phi(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$$

Обычно его ищут в степенной форме $Nu = C\,Re^m\,Pr^n$; C, m, n определяют по опытным точкам в логарифмических координатах.

Одна критериальная зависимость заменяет множество опытов с разными жидкостями, размерами и скоростями.

Условия подобия

геометрическое подобие + равенство определяющих критериев (Re, Pr, …) + подобные граничные условия

Определяемые критерии

Eu, Nu, C_D — находятся как функции определяющих

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Изотермическое течение однородной вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса и неразрывности (2).
2. Для задач теплообмена систему дополняют уравнением энергии с теплопроводностью и вязкой диссипацией.
3. В безразмерном виде решение зависит только от критериев подобия Re, Fr, Sh, Pr, Pe, Ec.
4. Определяемые критерии (Eu, Nu, коэффициент сопротивления) — функции определяющих.
5. Пограничный слой: $\delta \approx 5x/\sqrt{Re_x}$; теплоотдача $Nu_x = 0{,}332 \cdot \sqrt{Re_x} \cdot \sqrt[3]{Pr}$.

Контрольные вопросы

1. Запишите закон Навье — Стокса для несжимаемой жидкости.
2. Выведите уравнения Навье — Стокса (1). Что такое кинематическая вязкость?
3. Какие граничные условия ставятся для вязкой жидкости?
4. Запишите уравнение энергии для несжимаемой жидкости. Каков смысл его членов?
5. Приведите уравнения к безразмерному виду. Какие критерии подобия появляются?
6. Каков физический смысл чисел Re, Fr, Pr, Pe, Nu?
7. Как оценить толщину пограничного слоя методом порядков?
8. Что такое критериальное уравнение и как его получают?