Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «7M05405 – Механика и энергетика» · магистратура

Дисциплина: Методы подобия и размерности в механике

Лекция № 10

Подобие тепловых процессов. Критерии подобия

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

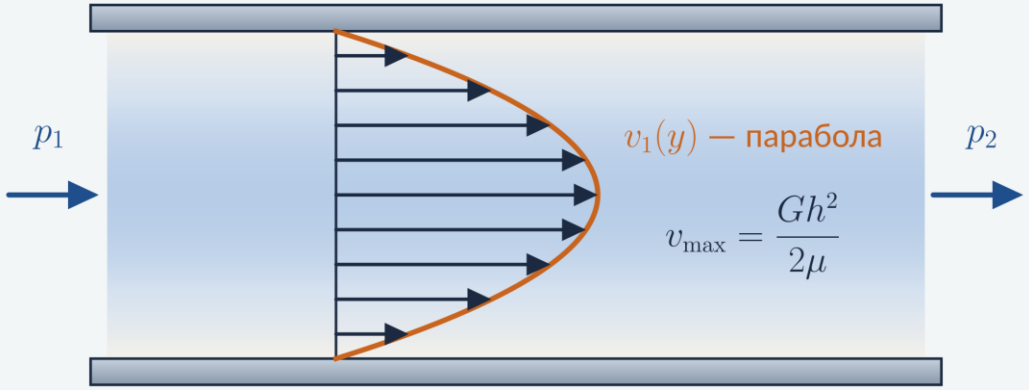
Алматы, 2026 год

Постановка задачи: течение в трубах

Рассмотрим подобие ламинарных **неизотермических** (T ≠ const) потоков вязкой несжимаемой жидкости в круглых трубах с различными:

- диаметрами d_1, d_2;
- плотностями ρ_1, ρ_2 и вязкостями μ_1, μ_2;
- теплопроводностями λ_1, λ_2;
- масштабами скорости V_{o1}, V_{o2} и температуры T_{o1}, T_{o2}.

Процесс стационарен; вязкой диссипацией и силой тяжести пренебрегаем.



$p_1 > p_2$: перепад давления G уравновешивается вязким трением

Ламинарное течение с параболическим профилем скорости (схема)

Безразмерная система уравнений

Система уравнений гидродинамики и теплообмена в безразмерных переменных:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{1}$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 \vec{v} \tag{2}$$

$$\vec{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\nabla^2 T \tag{3}$$

где

$$\mathrm{Re} = \frac{V_0 d}{\nu}, \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a_T}, \qquad a_T = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

c_p

удельная теплоёмкость при постоянном давлении

$a = a_t$

коэффициент температуропроводности

Определяющие критерии и искомые поля

В систему (1)–(3) входят **два независимых параметра** — Re и Pr. Распределения искомых характеристик определяются функциями:

$$\frac{v_i}{V_0} = f\left(\frac{x_i}{d}, \mathrm{Re}\right), \qquad \theta = g\left(\frac{x_i}{d}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right)$$

Поле скорости

зависит только от Re: гидродинамика не зависит от теплообмена (свойства постоянны)

Поле температуры

зависит от Re и Pr: перенос тепла определяется полем скорости и теплопроводностью

$\theta = (T - T_w)/(T_0 - T_w)$ — безразмерная температура, T_w — температура стенки.

Условия подобия тепловых процессов

Геометрическое

цилиндрические трубы

Кинематическое

ламинарные течения

Динамическое

$Re_1 = Re_2$

Тепловое

$Pr_1 = Pr_2$

При наличии геометрического, кинематического и динамического подобия рассматриваемые тепловые процессы подобны, если

$$\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2, \qquad \mathrm{Pr}_1 = \mathrm{Pr}_2 \tag{4}$$

Тепловой начальный участок

Жидкость с температурой T_0 входит в трубу со стенкой T_w. Профиль температуры постепенно перестраивается; длина участка стабилизации пропорциональна Re·Pr:



Численное решение задачи Гретца: поле безразмерной температуры θ в трубе с параболическим профилем скорости

$$\frac{L_T}{d} \approx 0{,}05\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}, \qquad \frac{L_h}{d} \approx 0{,}05\,\mathrm{Re}$$

Длины начальных участков

Профиль скорости стабилизируется на длине L_h, профиль температуры — на длине L_T:

$$\frac{L_T}{d} \approx 0{,}05\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}, \qquad \frac{L_h}{d} \approx 0{,}05\,\mathrm{Re}$$

Отношение $L_T/L_h \approx \mathrm{Pr}$: в воде тепловой участок примерно в 7 раз длиннее гидродинамического, в маслах — в сотни раз.

Среда (Re = 1000)	Pr	L_h/d	L_T/d
воздух	0,71	50	≈ 36
вода, 20 °C	7	50	≈ 350
масло	150	50	≈ 7 500

Длины участков, отнесённые к d, — функции только Re и Pr: ещё одно следствие теории подобия.

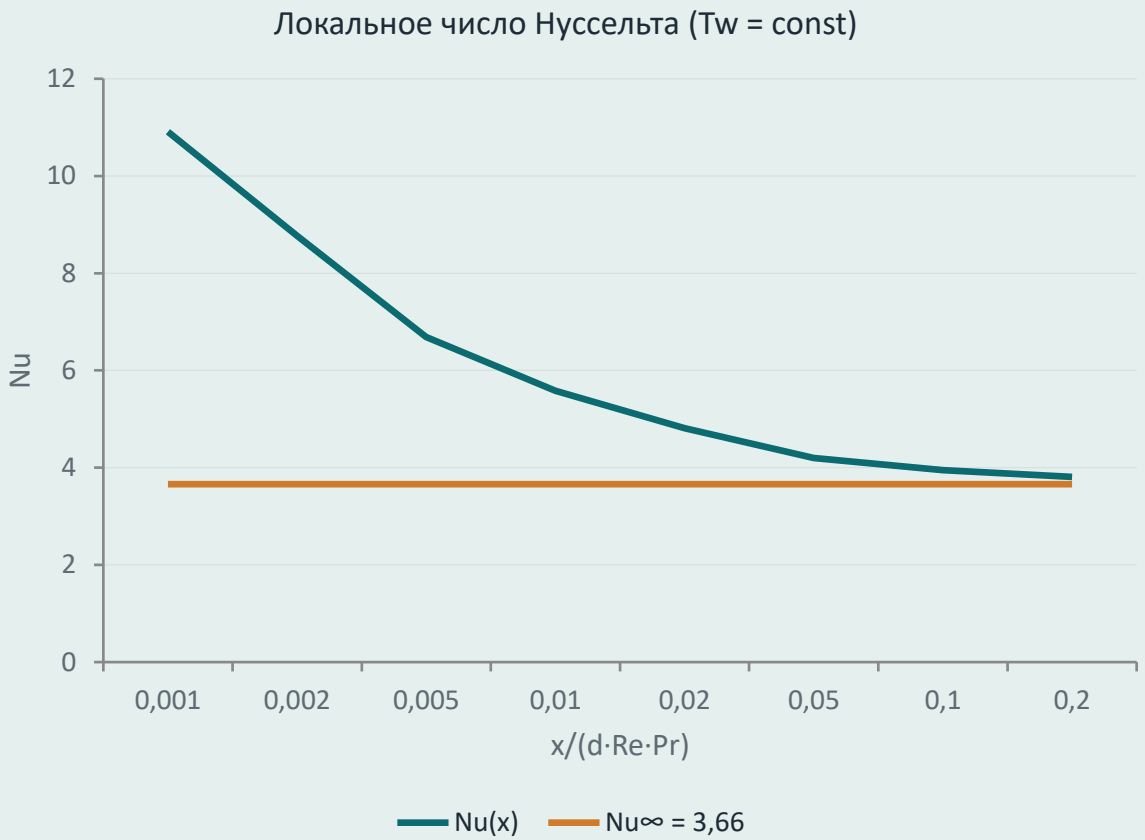
Теплоотдача в трубе: число Нуссельта

На входе слой тонкий и теплоотдача велика; далее Nu убывает до предельного значения:

$$\mathrm{Nu}_\infty = \frac{\alpha d}{\lambda} = 3{,}66\ (T_w = \mathrm{const}), \qquad 4{,}36\ (q_w = \mathrm{const})$$

На стабилизированном участке Nu не зависит ни от Re, ни от Pr — **автомодельность**.

Для начального участка (решение Левека): Nu ≈ 1,08·(x/(d·Re·Pr))$^{-1/3}$.



Пример: моделирование теплообменника

Натура: труба d = 20 мм, вода при 20 °C ($\nu = 1{,}0\cdot10^{-6}$ м²/с, Pr ≈ 7), V_0 = 0,1 м/с: Re = 2 000 — ламинарный режим.

Модель с d′ = 10 мм должна иметь Re′ = 2 000 и Pr′ ≈ 7:

- в воде при той же температуре: V_0' = 0,2 м/с;
- другая жидкость допустима лишь с тем же Pr.

Результат пересчитывается на натуру через Nu: $\alpha = Nu\cdot\lambda/d$. При одинаковом Nu и λ коэффициент α натуры вдвое меньше, чем у модели.

Роль числа Прандтля

При Pr ≠ Pr′ тепловое подобие нарушается, даже если Re = Re′.

Практика

Температуру модельной жидкости подбирают так, чтобы Pr совпало: Pr воды падает от 13 при 0 °C до 1,75 при 100 °C.

Зависимость Pr воды от температуры

Число Прандтля определяется свойствами среды μ, c_p, λ, которые зависят от температуры.

Для воды Pr уменьшается почти в 8 раз между 0 и 100 °C — в основном за счёт падения вязкости.

При моделировании нужно учитывать рабочую температуру: «вода» в модели и натуре — не всегда одна и та же по Pr.



Обобщение: критерии подобия курса

Критерий	Формула	Где появляется	Тип
Рейнольдса	$Re = V_o L/\nu$	уравнение движения	определяющий
Фруда	$Fr = V_o^2/(gL)$	массовые силы	определяющий
Струхаля	$Sh = L/(V_o t_o)$	нестационарность	определяющий
Эйлера	$Eu = \Delta p/(\rho V_o^2)$	сила давления	определяемый
Прандтля	$Pr = \nu/a$	уравнение энергии	определяющий (среда)
Нуссельта	$Nu = \alpha L/\lambda$	граничное условие для T	определяемый

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Подобие неизотермических ламинарных течений в трубах описывается безразмерной системой (1)–(3).
2. Независимые параметры — $Re = V_o d/\nu$ и $Pr = \nu/a$.
3. Поле скорости зависит только от Re, поле температуры — от Re и Pr.
4. При геометрическом, кинематическом и динамическом подобии тепловые процессы подобны, если $Pr_1 = Pr_2$.
5. На стабилизированном участке Nu = 3,66 (Tw = const) — автомодельность по Re и Pr.

Контрольные вопросы

1. Запишите безразмерную систему уравнений гидродинамики и теплообмена в трубе.
2. Какие независимые параметры входят в эту систему?
3. От каких критериев зависят поля скорости и температуры?
4. Перечислите условия подобия тепловых процессов.
5. Что такое тепловой начальный участок и от чего зависит его длина?
6. Почему на стабилизированном участке Nu не зависит от Re и Pr?
7. Как подобрать модельную жидкость для теплового моделирования?