Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Факультет механико-математический

Кафедра механики

Образовательная программа «7M05405 – Механика и энергетика» · магистратура

Дисциплина: Методы подобия и размерности в механике

Лекция № 7

Система уравнений термодинамики сплошной среды: уравнения притока тепла и энтропии

Преподаватель: Туралина Динара Елеусизовна

к.ф.-м.н., ассистент-профессор

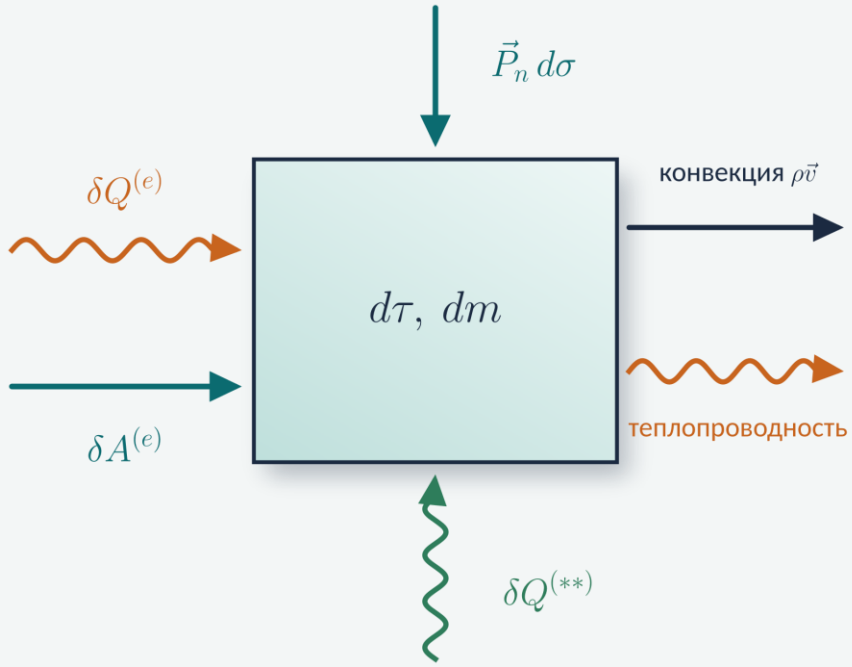
Алматы, 2026 год

Притоки энергии к частице среды

Система характеризуется конечным числом **определяющих параметров** $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n$. По ним и по их приращениям $d\mu^k$ можно судить о макроскопических притоках энергии к частице извне.

Полный внешний приток энергии к бесконечно малому объёму в элементарном процессе:

$$\delta A^{(e)} + \delta Q^{(e)} + \delta Q^{(**)}$$



$\delta A^{(e)}$

работа внешних массовых и поверхностных сил

$\delta Q^{(e)}$

приток тепла извне

$\delta Q^{(**)}$

химические реакции, ионизация, диссипация и др.

Первый закон термодинамики

Первый закон (закон сохранения энергии): невозможен **вечный двигатель первого рода** — циклическая машина, дающая полезную энергию без внешнего источника.

Отсюда существует функция состояния — полная энергия:

$$\mathcal{E} = \int_\tau \left(\frac{v^2}{2} + U\right)\rho\, d\tau, \qquad d\mathcal{E} = \delta A^{(e)} + \delta Q^{(e)} + \delta Q^{(**)} \tag{1}$$

U — удельная внутренняя энергия, определённая с точностью до аддитивной постоянной.

Кинетическая энергия E

энергия макроскопического движения: ∫ρv²/2 dτ

Внутренняя энергия U_m

энергия теплового движения и взаимодействия молекул: ∫ρU dτ

Для теории подобия

баланс энергии даёт ещё одно уравнение, а значит — новые критерии подобия

Закон сохранения энергии и уравнение притока тепла

Закон сохранения энергии для объёма сплошной среды:

$$dE + dU_m = \delta A^{(e)} + \delta Q^{(e)} + \delta Q^{(**)} \tag{2}$$

Вычитая теорему живых сил $dE = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)}$, получаем **уравнение притока тепла**:

$$dU_m = -\delta A^{(i)} + \delta Q^{(e)} + \delta Q^{(**)} \tag{3}$$

Деля на Δm и переходя к пределу $\Delta m \to 0$:

$$dU = \frac{1}{\rho} P^{ij} \nabla_j v_i \, dt + dq^{(e)} + dq^{(**)} \tag{4}$$

dE

изменение кинетической энергии

dU_m

изменение внутренней энергии

$-\delta A^{(i)}$

работа внутренних напряжений с обратным знаком

Второй закон. Энтропия

Второй закон: невозможно устройство, переводящее тепло от тела с меньшей температурой к телу с большей без изменений в других телах; он характеризует **направленность** процессов. Количественно: существуют функции состояния — **энтропия S** и **абсолютная температура T**, такие что для любых процессов

$$T\,dS = \delta Q^{(e)} + \delta Q', \qquad \delta Q' \geq 0 \tag{5}$$

δQ′ — некомпенсированное тепло

мера необратимости процесса

δQ′ = 0

обратимые процессы

δQ′ > 0

необратимые процессы: трение, теплопроводность, диффузия

Для обратимых процессов:

$$dS = \frac{\delta Q^{(e)}}{T} \tag{6}$$

$$S(B) = \int_A^B \frac{\delta Q^{(e)}}{T} + S(A)$$

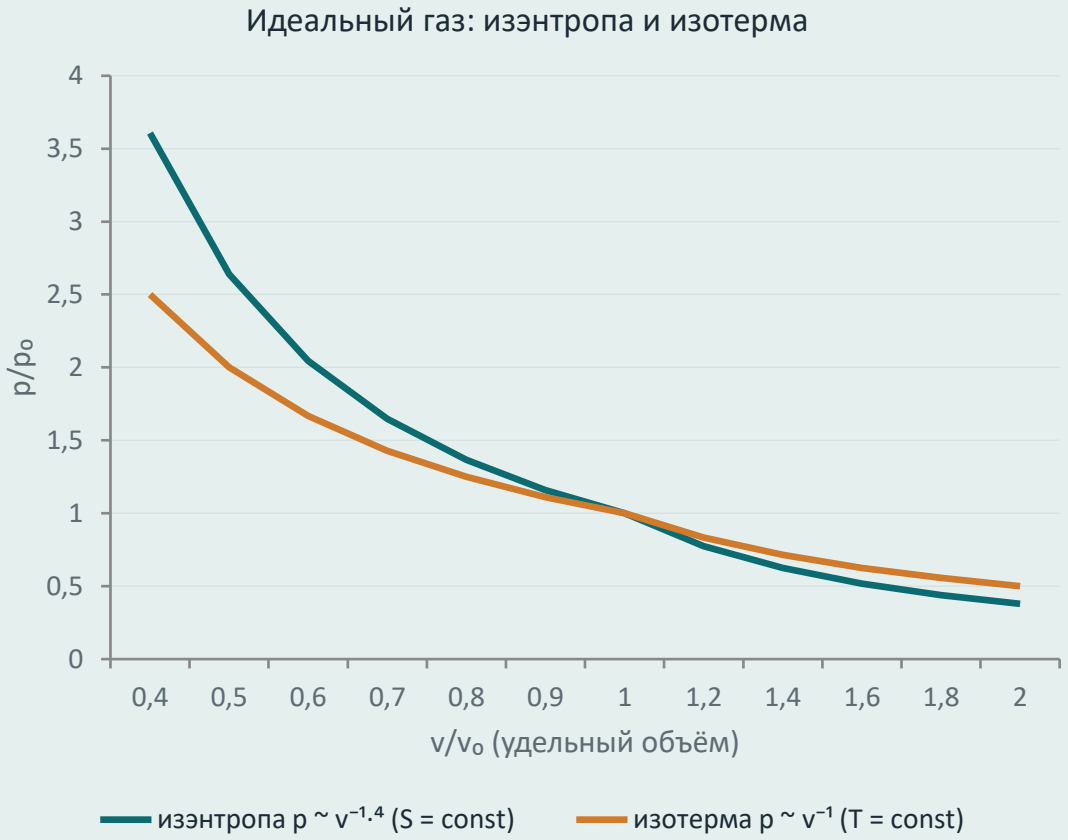
Адиабатические и изэнтропические процессы

Процессы в теплоизолированной системе, подверженной любым силовым воздействиям, называются **адиабатическими**. Для обратимых адиабатических процессов:

$$\delta Q^{(e)} = 0: \qquad T\,dS = 0 \;\Rightarrow\; S = \text{const} \tag{7}$$

Обратимые адиабатические процессы **изэнтропичны**; и наоборот, обратимый изэнтропический процесс адиабатичен.

В необратимом адиабатическом процессе T dS = δQ’ > 0 — энтропия только растёт.



Баланс энтропии в вязкой теплопроводной жидкости

Тождество Гиббса связывает энтропию с внутренней энергией:

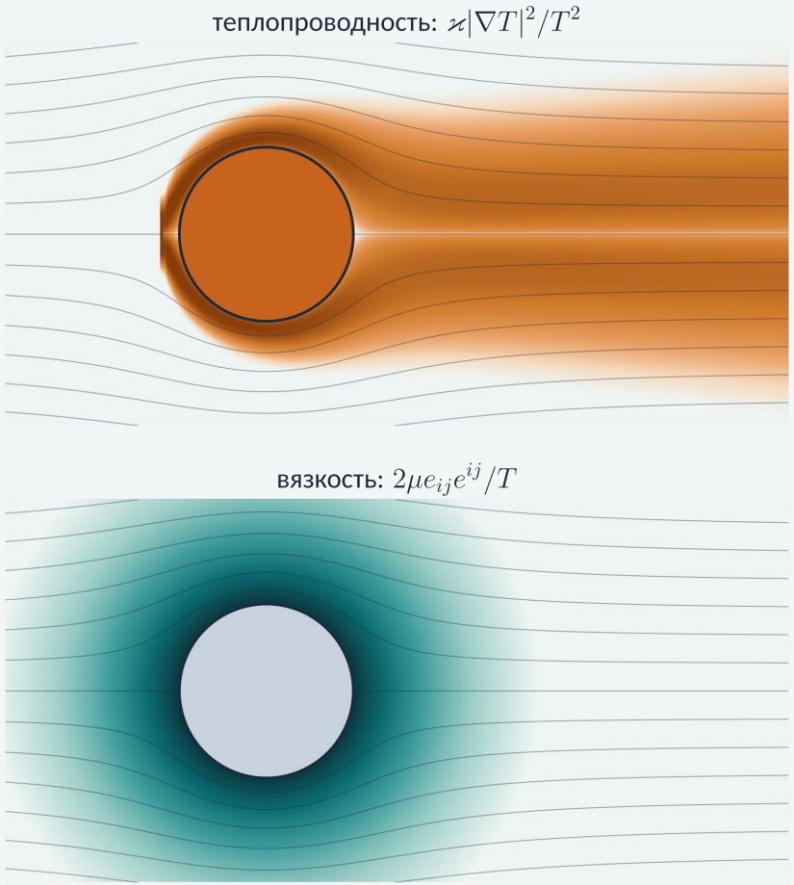
$$T\,dS = dU + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Для вязкой несжимаемой жидкости с законом Фурье из уравнения притока тепла (4):

$$\rho T\,\frac{dS}{dt} = \operatorname{div}\left(\varkappa \nabla T\right) + 2\mu\, e_{ij} e^{ij}$$

Локальное производство энтропии всегда неотрицательно:

$$\sigma_S = \frac{\varkappa\,|\nabla T|^2}{T^2} + \frac{2\mu\, e_{ij} e^{ij}}{T} \;\geq 0$$



Производство энтропии при обтекании нагретого цилиндра (логарифмическая шкала)

От уравнения притока тепла к критериям подобия

Для несжимаемой жидкости с законом Фурье уравнение притока тепла (4) принимает вид:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = \lambda \, \Delta T + 2\mu \, e_{ij} e^{ij}$$

Введём масштабы:

$$\vec{x} = L \, \vec{x}^*, \quad \vec{v} = V_0 \, \vec{v}^*, \quad t = t_0 \, t^*, \quad T = T_0 + \Delta T \, \theta$$

Отношение порядков членов «конвекция : теплопроводность : диссипация»:

$$\frac{\rho c_p V_0 \Delta T}{L} \; : \; \frac{\lambda \Delta T}{L^2} \; : \; \frac{\mu V_0^2}{L^2} \; = \; 1 \; : \; \frac{1}{\mathrm{Pe}} \; : \; \frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}$$

Каждый член уравнения энергии, отнесённый к конвективному, даёт безразмерный критерий.

Безразмерное уравнение энергии

Деля на масштаб конвективного члена $\rho c_p V_o \Delta T/L$, получаем:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\,\Delta\theta + \frac{\mathrm{Ec}}{\mathrm{Re}}\,\Phi, \qquad \mathrm{Pe} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}, \quad \mathrm{Ec} = \frac{v_0^2}{c_p\,\Delta T}$$

Пекле Pe = Re·Pr

конвективный перенос тепла / теплопроводность

Прандтля Pr = ν/a

диффузия импульса / диффузия тепла; свойство среды

Эккерта Ec = $V_o^2/(c_p\Delta T)$

кинетическая энергия / перепад энтальпии; роль диссипации

Если процесс нестационарен с заданным масштабом t_o, при $\partial\theta/\partial t$ появляется ещё число Струхаля $Sh = L/(V_o t_o)$.

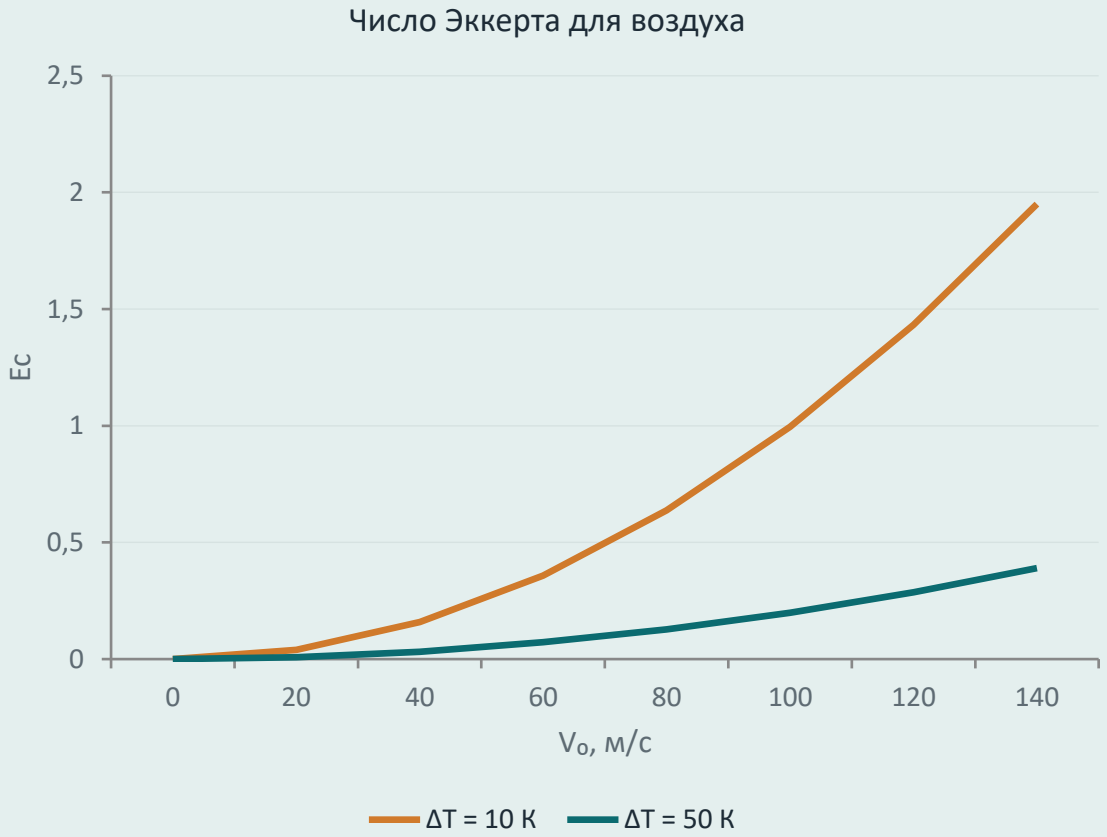
Когда диссипацией можно пренебречь

Диссипативный нагрев существен, когда кинетическая энергия потока сравнима с изменением энтальпии:

$$\Delta T_{\text{диссип}} \sim \frac{V_0^2}{2c_p} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ec} \sim 1$$

Воздух ($c_p \approx 1\,005$ Дж/(кг·К)) при ΔT = 10 К: Ec = 0,01 при V_0 = 10 м/с, но Ec ≈ 1 при V_0 ≈ 100 м/с.

В низкоскоростных течениях Ec ≪ 1 — диссипацию отбрасывают; так сделано в лекциях 8–10. В высокоскоростной аэродинамике её учитывают обязательно.



Условия подобия теплового процесса

Безразмерные уравнения движения и энергии совпадают для натуры и модели, если равны все входящие в них критерии:

$$\mathrm{Sh}_1 = \mathrm{Sh}_2, \quad \mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2, \quad \mathrm{Pr}_1 = \mathrm{Pr}_2, \quad \mathrm{Ec}_1 = \mathrm{Ec}_2$$

Гидродинамика

Sh, Re (и Fr при свободной поверхности) — лекция 6

Перенос тепла

Pr — свойство среды; вместе с Re определяет Pe

Диссипация

Ec — при больших скоростях; при Ec ≪ 1 условие отпадает

Плюс подобие тепловых граничных условий (T_w = const или q_w = const). Определяемое число — Нуссельта (лекции 8–10).

Заключение и вопросы для самоконтроля

Выводы

1. Внешний приток энергии к частице: $\delta A^{(e)} + \delta Q^{(e)} + \delta Q^{(**)}$.
2. Первый закон: существует полная энергия $\mathcal{E} = \int(v^2/2 + U)\rho d\tau$; $dE + dU_m = \delta A^{(e)} + \delta Q^{(e)} + \delta Q^{(**)}$.
3. Уравнение притока тепла: $dU_m = -\delta A^{(i)} + \delta Q^{(e)} + \delta Q^{(**)}$; в дифференциальной форме (4).
4. Второй закон: $T\,dS = \delta Q^{(e)} + \delta Q'$, $\delta Q' \geq 0$; обратимые адиабатические процессы изэнтропичны.
5. Обезразмеривание уравнения энергии даёт критерии $Pe = Re \cdot Pr$ и Ec; подобие требует Sh, Re, Pr, Ec = idem.

Контрольные вопросы

1. Из каких частей складывается внешний приток энергии к частице?
2. Сформулируйте первый закон термодинамики.
3. Как выводится уравнение притока тепла (3)–(4)?
4. Сформулируйте второй закон. Что такое некомпенсированное тепло?
5. Какие процессы называются адиабатическими и изэнтропическими?
6. Каковы источники производства энтропии в вязкой теплопроводной жидкости?
7. Какие критерии подобия появляются в безразмерном уравнении энергии? Каков их смысл?
8. Когда вязкой диссипацией можно пренебречь? Оцените число Эккерта.